

文登教育

Wendeng Education



理工社®

2016

文登教育集团课堂用书

（理工类）

考研数学
题型集粹与水平测试

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 黄先开 主 编

李 娜 副主编

本书使用说明：

- 关于答疑请登录：www.wendengonline.com。
- **以题型为纲**，揭示出题规律，提炼解题技巧。
- 建议与“复习指南”同步使用，效果更佳！



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

责任编辑：高 芳

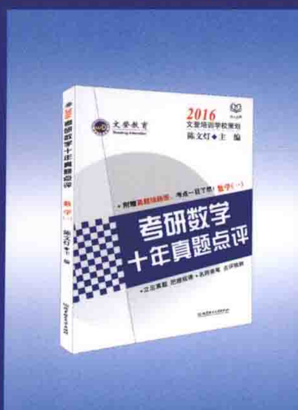
封面设计：尚書坊图文设计

名师介绍

陈文灯　中央财经大学教授，北京文登学校校长。原中央财经大学数学系主任，北京数学学会理事。在教学和科研上成果卓著，2000年获得“特殊贡献奖”，享受国务院特殊津贴，在考研学子和同仁中有口皆碑。



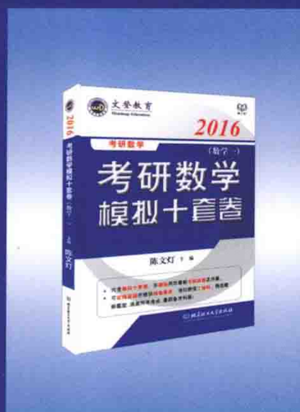
总结最独到 讲解最系统



十年点评，总结规律；
考点线路，按图索骥；
分值比重，题型清晰；
思路分析，详解精细；
技巧评注，总结对比；
把握命题，考场无敌！

冲刺阶段制胜宝典

冲刺加速，历年真题；
查缺补漏，十套模拟；
大纲考点，命题规律；
庖丁解牛，解析精辟；
温故知新，题题珍惜；
金榜题名，再创佳绩！







扫一扫 享陈文灯考研图书增值服务

理工社网址：http://www.bitpress.com.cn
答疑论坛：http://bbs.wendengonline.com

ISBN 978-7-5640-9803-2



定价：43.80元



文登教育

Wendeng Education

2016

文登教育集团课堂用书

（理工类）

考研数学

题型集粹与水平测试

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 黄先开 主 编

李 娜 副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



图书在版编目(CIP)数据

考研数学题型集粹与水平测试:理工类 / 陈文灯,黄先开主编. —北京:北京理工大学出版社,2014.10

ISBN 978-7-5640-9803-2

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①陈… ②黄… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第225405号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京文良精锐印刷有限责任公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 20.5
字　　数 / 500千字
版　　次 / 2014年10月第1版　2014年10月第1次印刷
定　　价 / 43.80元

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前 言

本书是我主编的2016版《考研数学复习指南》一书的续篇。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书，将会进一步拓宽思路，掌握各类题型的解题方法和技巧，大大提高做题的准确性和速度。

本书在2015版的基础上作了很大程度的修订，有以下特点。

(1)重点突出。本书针对"考纲"要求重点掌握的概念、公式、定理，通过题型的形式予以强化，同时，指出解题的方法和技巧，尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题，按本书所指的思路、方法去分析将会迎刃而解。

(2)针对性强，覆盖面大。本书不是一般性的题解书，不搞题海战术，而是以题型为纲，通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题，总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

(3)超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题是基于作者多年的教学心得，并经多个不眠之夜思索而得的。读者通过做这些例题不仅可以将各知识点串在一起，而且可以拓展思路，遇到从未见到的题时，可以从容应对。

成书仓促，定有不当及错误之处，恳请广大读者、数学同仁批评指正。

陈文灯

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇*　概率论与数理统计初步

第一篇　高等数学

第一章　函数·极限·连续

§1　函　　数

一、有关函数概念的题型

题型Ⅰ　判别函数的等价性

【解题提示】　当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则为不同函数.

【例 1.1】　设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在，且$f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，则与$f(x)$等价的函数是【　　】

(A)$y=\int_0^x(x^2-2x)\mathrm{d}x$.　　(B)$y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t$.

(C)$y=\int f'(x)\mathrm{d}x$.　　(D)$y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$.

【解】　设$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=l$，则$f(x)=x^2+2xl$，

两边取$x\to 1$时的极限，得$l=1+2l\ \Rightarrow\ l=-1\ \Rightarrow f(x)=x^2-2x$.

(A)$y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$与$f(x)$的对应关系不同.

(B)$y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t=x^2-2x$.

(C)$y=f(x)+C=x^2-2x+C$与$f(x)$对应关系不同.

(D)$y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$，定义域$x<0$或$x>2$，与$f(x)$定义域不同，故(B)入选，实际做题时不必像以上那样处理，求出$f(x)$的表达式后一眼即可看出(B)入选.

题型Ⅱ　利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解$f(x)$的表达式

【解题提示】　一种是所谓"凑法"——将给出的表达式凑成对应符号$f(\ \ )$内的中间变量的表达形式，然后用"无关特性"即可得出$f(x)$的表达式. 另一种方法是先作变量替换再用"无关特性"，然后通过联立方程得出$f(x)$的表达式. 多元函数也可以用这两种方法处理.

【例 1.2】　求解以下各小题中$f(x)$的表达式：

(1)$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+1}+\sin\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2,\ |x|>1$.

(2)$f(\sin^2x)=\cos 2x+\tan^2x,\ 0<x<1$.

【解】　(1)$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-1}+\sin\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right]+2$,

故　$f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sin(x^2-2)+2,\ |x|>2.$

(2) $f(\sin^2 x)=1-2\sin^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}-1=1-2\sin^2 x+\dfrac{1}{1-\sin^2 x}-1,$

故　$f(x)=-2x+\dfrac{1}{1-x},\quad 0<x<1.$

【例 1.3】　设 $f(x)$ 满足方程：$af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x$，其中 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

【解】　令 $t=-\dfrac{1}{x}$，则 $x=-\dfrac{1}{t}$，于是原方程变为　$bf(t)+af\left(-\dfrac{1}{t}\right)=-\sin\dfrac{1}{t}$，

由"无关特性"得　$bf(x)+af\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\sin\dfrac{1}{x}$.

解联立方程组
$$\begin{cases}af(x)+bf\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\sin x\\ bf(x)+af\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-\sin\dfrac{1}{x}\end{cases},$$

得　$f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(a\sin x+b\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

【例 1.4】　设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2+\cos(xy)$，求 $f(x,y)$.

【解】　令 $u=x+y,v=\dfrac{y}{x}\Rightarrow x=\dfrac{u}{1+v},y=\dfrac{uv}{1+v}$，则

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2+\cos\frac{u^2v}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}+\cos\frac{u^2v}{(1+v)^2},$$

故　$f(x,y)=\dfrac{x^2(1-y)}{1+y}+\cos\dfrac{x^2y}{(1+y)^2}\quad(y\neq-1)$.

二、函数的性质

题型 Ⅲ　函数奇偶性的判别

【解题提示】　判别函数奇偶性的方法：① 主要依据奇偶性的定义.有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；偶函数之积为偶函数；偶数个奇函数之积为偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数). ② $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法. ③ 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】　判别下列函数的奇偶性：

(1) $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2) $F(x)=f(x)+\displaystyle\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$，其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.

(3) $F(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)f(x)$，其中 $a>0,a\neq1$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任何 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

【解】 (1) $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-u} \int_0^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u) \xlongequal[偶函数]{f(x)为} \int_0^{x}f(u)\mathrm{d}u$,

因为 $F(x)+F(-x)=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t=0$,

所以 $F(x)$ 为奇函数.

(2) $F(x)=f(x)+\int_0^{x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$, ①

$F(-x)=f(-x)+\int_0^{-x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$, ②

因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)+f(-x)=0$, ③

又因为 $\int_0^{-x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \xlongequal{令 u=-v} \int_0^{x}\left[\int_0^{-v}f(t)\mathrm{d}t\right](-\mathrm{d}v)=-\int_0^{x}\left[\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$, ④

由 ①,②,③,④ 得

$F(x)+F(-x)=\int_0^{x}\left[\int_0^{u}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\int_0^{x}\left[\int_{-u}^{u}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=0$,

故 $F(x)$ 为奇函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,

因为 $g(x)+g(-x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{a^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a^x}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=0$,

所以 $g(x)$ 为奇函数.

又因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$,

又显然有 $0=f(0)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x)=g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 Ⅳ　求解给定函数的周期或周期性证明

【解题提示】 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明.

【例 1.6】 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数,证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】 令 $F(x)=f(ax)$,由于

$F\left(x+\dfrac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\dfrac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T) \xlongequal[f(x)的周期]{因为 T 是} f(ax)=F(x)$,

故 $\dfrac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】 设函数 $y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a,x=b$ 均对称($a\neq b$),求证:$y=f(x)$ 是周期函数,并求其周期.

【证】 由题设有 $f(a+x)=f(a-x),f(b+x)=f(b-x)$,

于是,$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]$
$=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$,

故 $f(x)$ 是周期函数,其周期 $T=2(b-a)$.

题型 V 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

【解题提示】 若没有言明函数 $f(x)$ 可导，则用单调性定义判别；若言明函数 $f(x)$ 可导，则利用函数的一阶导数判别.

【例 1.8】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，证明 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内单调增加.

【证】 $F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{f(x)}{x-a}=-\int_a^x\frac{f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t+\int_a^x\frac{f(x)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t$

$=\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t.$

因为 $(x-a)^2>0$ 且 $f(x)$ 单调上升，当 $x>t$ 时，$f(x)-f(t)\geqslant 0$，

所以 $F'(x)\geqslant 0$，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

题型 VI 函数有界性的判别

【解题提示】 证明或判别函数有界性的思路：

(1) 利用有界性定义；

(2) 闭区间上连续函数的有界性；

(3) 有极限数列必有界；

(4) $x\to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

【例 1.9】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$（$l$ 为有限数），试证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【证】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$， 所以对于取 $\varepsilon=\frac{|l|}{2}$，$\exists X>0$，当 $x>X$ 时，恒有

$$|f(x)-l|<\frac{|l|}{2},$$

又 $|f(x)-l|>|f(x)|-|l|$，所以 $|f(x)|-|l|<\frac{|l|}{2}$，

即 $|f(x)|<\frac{3}{2}|l|$.

因为 $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，由闭区间上连续函数有界性，可知 $\exists S$，使 $|f(x)|<S, x\in[a,X]$.

取 $M=\max\left\{S,\frac{3}{2}|l|\right\}$，则对 $\forall x\in[a,+\infty)$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，

即函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【例 1.10】 试证 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【证】 令 $g(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，

因为 $g(-x)=\int_0^{-x}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 } u=-t}\int_0^x -u\mathrm{e}^{(-u)^2}(-\mathrm{d}u)=\int_0^x u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u$，

所以 $g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}g(x)$ 也为偶函数，所以只需证明 $f(x)$ 在

$[0,+\infty)$ 上有界即可.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x te^{t^2}\,dt}{e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\dfrac{1}{2}$,

所以　取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, $\exists X>0$, 当 $x\in[X,+\infty)$ 时, 有

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},\quad \text{即}\quad 0<f(x)<1.$$

又 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续, 于是, $\exists l>0$, 使对 $\forall x\in[0,X]$, 恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant l$, 取 $M=\max\{1,l\}$, 则 $\forall x\in[0,+\infty)$, 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 同理可证 $(-\infty,0]$ 的情形, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

三、复合函数

【解题提示】 将两个或两个以上函数进行复合，通常有三种方法：代入法（适用于初等函数的复合），分析法（适用于初等函数与分段函数的复合，或两分段函数的复合），图示法（适用于两分段函数的复合）.

【例 1.11】 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【解】 $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f^2(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}=\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.12】 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n\text{次}}$, 若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

【解】 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\bigg/\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}.$$

比较以上两式可知　$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.（由数学归纳法可证）

于是　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}=\dfrac{x}{|x|}$.

【例 1.13】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}.$$

(1)　当 $\varphi(x) < 1$ 时，

或 $x < 0, \varphi(x) = x + 2 < 1$，即 $\begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1$，

或 $x \geqslant 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1$，即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant x < \sqrt{2}$；

(2)　当 $\varphi(x) \geqslant 1$ 时，

或 $x < 0, \varphi(x) = x + 2 \geqslant 1$，即 $\begin{cases} x < 0 \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leqslant x < 0$，

或 $x \geqslant 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geqslant 1$，即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant \sqrt{2}$；

综上所述，有　$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1, \\ x + 2, & -1 \leqslant x < 0, \\ e^{x^2-1}, & 0 \leqslant x < \sqrt{2}, \\ x^2 - 1, & x \geqslant \sqrt{2}. \end{cases}$

【例 1.14】　设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|), \varphi(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

【解】　图示法的解题程序：1° 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图像；2° 将 $y = f(u)$ 的分界点在 xOu 坐标面上画出（这是若干条平行于 x 轴的直线）；3° 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间；4° 将 3° 所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|],\qquad (*)$$

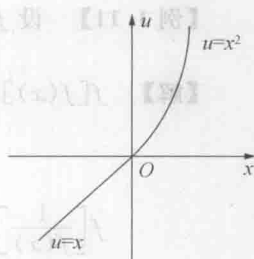


图 1.1

作出 $u = \varphi(x)$ 的图像，如图 1.1 所示，以及 $f(u) = \frac{1}{2}(u + |u|)$ 的分界点 $u = 0$　（xOu 平面上的 x 轴）.

当 $x < 0$ 时，$u = x$.（$u < 0$）

当 $x \geqslant 0$ 时，$u = x^2$.（$u \geqslant 0$）

将以上所得结果代入（$*$）式，得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

§2　极　　限

一、数列的极限

题型 Ⅰ　已知数列的前几项数值及通项的表达式，求数列的极限

【解题提示】 或者利用单调有界数列必有极限定理求解（求解程序：① 判断极限的存在性 $\begin{cases}\text{单调性}\\ \text{有界性}\end{cases}$，方法可用数学归纳法或不等式的放缩法；② 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = l$，然后通过解关于 l 的方程，求得 l 的值，从而得极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$）. 或者利用数列极限的定义求解（先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = l$，然后在通项的两边取极限得出 l 的数值，再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量）.

【例 1.15】 设 $x_1 = 2, x_2 = 2 + \dfrac{1}{x_1}, \cdots, x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = l$，在 $x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l = 2 + \frac{1}{l} \quad\Rightarrow\quad l^2 - 2l - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad l = 1 \pm \sqrt{2}.$$

因为由题设可知 $x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n} > 2$，所以 $l = 1 + \sqrt{2}$.

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在：

$$\begin{aligned}
|x_n - l| &= \left|\left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{l}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l}\right| \\
&= \frac{|x_{n-1} - l|}{l x_{n-1}}\left(\text{因为 } x_{n-1} = 2 + \frac{1}{x_{n-2}} > 2, l = 2 + \frac{1}{l} > 2\right) \\
&< \frac{|x_{n-1} - l|}{4} < \frac{|x_{n-2} - l|}{4}/4 \\
&= \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} < \frac{|x_{n-3} - l|}{4^3} < \cdots < \frac{|x_1 - l|}{4^{n-1}} \\
&= \frac{|2 - (1 + \sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1 - \sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}},
\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} = 0$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - l) = 0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \sqrt{2} + 1$.

【例 1.16】 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \dfrac{x_1}{1 + x_1}, \cdots, x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = l$，在 $x_n = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{l}{1 + l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$，由题设可知 $l = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在：

$$\begin{aligned}
|x_n - l| &= \left|\left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{l}{1 + l}\right)\right| \\
&= \frac{|x_{n-1} - l|}{|(1 + x_{n-1})(1 + l)|} < \frac{|x_{n-1} - l|}{2(1 + l)} < \cdots < \frac{|x_1 - l|}{2^{n-1}(1 + l)} \\
&= \frac{\dfrac{l}{1 + l}}{2^{n-1}(1 + l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1 + l)^2}.
\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-l)=0$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【另解】 由题设可知 $x_n>0\quad(n=1,2,\cdots)$,

$x_2-x_1=\left(1+\dfrac{x_1}{1+x_1}\right)-1=\dfrac{x_1}{1+x_1}>0$. 于是,$x_2>x_1$.

设 $x_n>x_{n-1}$,则

$$x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{x_n}{x_n+1}\right)-\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)=\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$$
$$=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}>0,$$

故$\{x_n\}$单调增加.

因为 $x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$(因为 $x_{n-1}>0$)<2,所以$\{x_n\}$有界.

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 设其为 l,于是

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right)$,即$l=1+\dfrac{l}{1+l}\ \Rightarrow\ l=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,由题设可知 l 非负.

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

【例 1.17】 设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$,其中 $a>0,x_0>0$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【证】 因为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$,所以$\{x_n\}$有界.

又因为$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{(\sqrt{a})^2}\right)=1$,所以$\{x_n\}$单减,

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,则由

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$,可得 $l=\dfrac{1}{2}\left(l+\dfrac{a}{l}\right)\Rightarrow l=\sqrt{a}$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

注 单调数列的极限既可用极限定义法,又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 Ⅱ 求解 $n\to\infty$ 时,n 项和的极限

【解题提示】 方法有:① 特殊级数求和法. ② 利用幂级数求和法. ③ 利用定积分定义求极限. ④ 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子$\dfrac{1}{n}$,剩余的可用一个通式表示,则用定积分定义求解数列的极限;若数列的各项虽可提出一个因子$\dfrac{1}{n}$,而剩余的不能用一个通式表示,但其各项是按递增或递减排列的,则用夹逼定理求极限.

【例 1.18】 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【解】 (1) 因为每一项中提出$\frac{1}{n}$后，剩余各项不能用一个通项表示出来. 因此不能用定积分定义求解.

$$1\leftarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to 1\quad(n\to\infty),$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)=1.$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

(3) $$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\leqslant\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{1}{\ln 2}$.

【例 1.19】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}$.

【解】 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+\frac{i^2+1}{n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}.$$

因为 $\frac{i^2}{n^2}\leqslant\frac{i^2+1}{n^2}\leqslant\frac{(i+1)^2}{n^2}$,

所以 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}.$$

又因为 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{1+\frac{(n+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(n+1)^2}=\arctan x\Big|_0^1+0=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\text{，故原极限}=\frac{\pi}{4}.$$

题型 Ⅲ　求 $n\to\infty$ 时，n 项乘积的极限

【解题提示】　解法有：(1) 分子，分母同乘以一个因子，使之出现连锁反应；(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式，在整个相乘过程中中间项相消，从而化简为易求极限；(3) 利用夹逼定理；(4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

【例 1.20】　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

【解】　(1) 因为 $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$,

又 $\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$,　$\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{3}$,

所以原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}$.

(2) 因为

$$\left.\begin{array}{l}1\cdot 3<2^2\\ 3\cdot 5<4^2\\ \cdots\\ (2n-1)(2n+1)<(2n)^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow 1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1)<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2\\ \Rightarrow 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\\ \cdots\\ \Rightarrow 0<\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{array}$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,

故由夹逼定理，原极限 $=0$.

(3) 取对数得 $\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}$,

两边取 $n\to\infty$ 时的极限，得

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=\ln 2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln 2+\frac{\pi-4}{2},$$

故原极限 $=\mathrm{e}^{\ln 2+(\pi-4)/2}=\mathrm{e}^{\ln 2}\cdot\mathrm{e}^{(\pi-4)/2}=2\mathrm{e}^{(\pi-4)/2}$.

题型Ⅳ　通项为积分形式的数列的极限

【解题提示】　注意：一般地 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b [\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x$，求解 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 的方法：(1) 利用不等式放缩法对 $I_n=\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 进行估值，再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值定理求极限.

【例 1.21】　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$.　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^1 \dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t$.

【解】　(1) 因为在 $[0,1]$ 上，$x^n\geqslant 0$，且 $\dfrac{1}{1+x}$ 连续，

所以 $0\leqslant\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{n+1}$，

其中 $0\leqslant\xi\leqslant 1$，故　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，　其中 $\varepsilon>0$ 为任意正数，

而　$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\sin^n\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\mathrm{d}x=\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\xi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\sin^n\xi$，

其中 $0<\xi<\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$，由于 $0<\sin\xi<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2}\sin^n\xi=0$.

又　$0<\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$，

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0$.

(3) 因为　$\cos 2t=1-\dfrac{1}{2!}(2t)^2+o(t^2)$，所以 $1-2t^2\leqslant\cos 2t\leqslant 1$，于是

$$\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1-2t^2}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{4t^2}\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow\quad -\dfrac{3}{4}+\dfrac{n}{4}+\dfrac{1}{2n}\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant-\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{4}$，两边同乘以 $\dfrac{1}{n}$，得

$$-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2n^2}\leqslant\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4}.$$

因为　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{3}{4n}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2n^2}\right)=\dfrac{1}{4}$，　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{4n}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$，

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^1\dfrac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}$.

题型Ⅴ　利用子序列的极限与函数的极限等值定理，求数列极限

【解题提示】　将序列中的自然数 n 换成连续变量 x，求出形式相同的函数的极限，即得数列的极限.

【例 1.22】　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(x\sin\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^{x^2}$,

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)\xlongequal{\text{令 } u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}\sin u-1}{u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{\sin u-u}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{\cos u-1}{3u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{-\sin u}{6u}=-\frac{1}{6},$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{6}}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}$.

二、函数的极限

题型 I　$\dfrac{0}{0}$ 型未定式的定值法

【解题提示】 求解 $\dfrac{0}{0}$ 型极限的方法：

(1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子，然后用连续函数的性质求极限；

(2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限；

(3) 利用洛毕达法则求极限(这是求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限最有效的方法)；

(4) 利用变量替换$\left(\text{通常是令 } x=\dfrac{1}{t} \text{ 或 } x=\dfrac{1}{t^2}\right)$.

【例 1.23】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin\sqrt[3]{x-1}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

【解】 (1) 将根式有理化，于是有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x}{(e^x-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

$$\xlongequal[\text{代换}]{\text{由等价无穷小}} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=1.$$

(2) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdots\lim_{x\to 1}\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

(3) 因为当 $x\to 1$ 时，$\sqrt[3]{x-1}\to 0$，

所以 $\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$，$\arcsin\sqrt[3]{x-1}\sim\sqrt[3]{x-1}$，

故原极限 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}=1.$

(4) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\frac{x^2}{e^{2x}}\right)}$

$$\xlongequal{\text{由等价无穷小}}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x/e^x}{x^2/e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{e^{2x}}{e^x}=1.$$

注 (1) 复杂的根式在求极限时，对其有理化比直接用洛毕达法则简单. 一般讲，遇到根式 $a+\sqrt{b}$（其共轭根式为 $a-\sqrt{b}$ 或 $-a+\sqrt{b}$），$\sqrt{a}+\sqrt{b}$（其共轭根式为 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$），不论其在分子或分母上都应该用共轭根式处理.

(2) 等价无穷小可简化求极限过程. 但是用的不得法会出大错. 一般讲，乘除运算时尽管用，加减运算时不宜用，此时常改用泰勒公式.

常用的等价无穷小代换：当 $x\to 0$ 时，

$\sin x$	$\sim$	x	$1-\cos x$	$\sim$	$\frac{1}{2}x^2$
$\arcsin x$	$\sim$	x			
$\tan x$	$\sim$	x	e^x-1	$\sim$	x
$\arctan x$	$\sim$	x	$a^x-1=e^{x\ln a}-1$	$\sim$	$x\ln a$
$\ln(1+x)$	$\sim$	x	$(1+\beta x)^\alpha-1$	$\sim$	$\alpha\beta x$

【例 1.24】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

【解】 本题是 $\frac{0}{0}$ 型极限，若直接用洛毕达法则，可知所得结果比没用法则前还复杂，这违背了运算的原则. 也不符合所介绍的其他两种方法，因此只有变量替换法可用了.

$$\text{原极限}\xlongequal{令\ u=\frac{1}{x^2}}\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{50}}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{50u^{49}}{e^u}=\cdots=\lim_{u\to+\infty}\frac{50!}{e^u}=0.$$

【例 1.25】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(e^{t^2}-1+t^2)^2\,dt}{x(\arctan x)^4}$.

(2) 设 $f(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

(3) 设 $f'(x)$ 连续,$f(0)=0$,$f'(0)\neq 0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$.

【解】 (1) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1+t^2)^2\mathrm{d}t}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{x^2}-1+x^2)^2}{5x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\mathrm{e}^{x^2}-1+x^2)\cdot(2x\mathrm{e}^{x^2}+2x)}{20x^3}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1+x^2}{x^2}$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}+2x}{2x}=\frac{4}{5}.$$

(2) $f(x)=\int_{x^2}^{x}\frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 }u=xt}\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^3}^{x^2}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2x-\frac{\sin x^3}{x^3}\cdot 3x^2}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x^2-3\sin x^3}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cos x^2-9x^2\cos x^3}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x^2-9x\cos x^3}{4}=1.$$

(3) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{2f(x)+f(x)+xf'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4f'(x^2)}{3\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)}=1.$$

题型 Ⅱ $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的定值法

【解题提示】 求解 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法:(1) 洛毕达法则;(2) 变量替换.

【例 1.26】 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\mathrm{d}t}{x}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^2+3}}{2x\sqrt{2x^4-1}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-x}}{3\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}}$.　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^{2x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_{3x}^{0}\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

【解】 (1) 原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x^2)\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2}=\frac{1}{2}$.

(2) 用洛毕达法则

$$\text{原极限}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{2-\dfrac{4x^3}{\sqrt{2x^4-1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{3}{(x^2+3)^{3/2}}}{\dfrac{-8x^6+12x^2}{(2x^4-1)^{3/2}}}=\frac{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{(x^2+3)^{3/2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8x^6+12x^2}{(2x^4-1)^{3/2}}}$$

$$=\frac{2}{-2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【另解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x^2+3}}{2x-\sqrt{2x^4-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}}{\dfrac{2}{x}-\sqrt{2-\dfrac{1}{x^4}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(3) 若一直用洛毕达法则，则越来越复杂，得不出结果.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+e^{-x}}{3e^x+2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}-e^{-x}}{3e^x+4e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}+e^{-x}}{3e^x+8e^{2x}}=\cdots$$

【另解】 原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-3x}}{3e^{-x}+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-3x})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(3e^{-x}+2)}=\dfrac{1}{2}.$

(4) $\text{原极限}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\displaystyle\int_0^{2x}e^{t^2}dt\cdot 2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}}=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^{2x}e^{t^2}dt}{e^{14x^2}}$

$$=-\frac{4}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}}=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{14}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{10x^2}}=0.$$

注　求 $x\to+\infty$ 时的极限，通常以“抓大头”的办法解决为好（所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项）.

题型 Ⅲ　$\infty-\infty$ 型未定式的定值法

【解题提示】 $\infty-\infty\xrightarrow[\text{或倒代换 }x=\frac{1}{t}]{\text{根式有理化或通分}}\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，再用洛毕达法或“抓大头”法求解.

【例 1.27】 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$.　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

【解】 (1) $\text{原极限}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x+x\cos x)}{x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

(2) $\text{原极限}\xlongequal{\text{令 }u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to0}\left[\dfrac{1}{u}-\dfrac{\ln(1+u)}{u^2}\right]=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u-\ln(1+u)}{u^2}$

$$=\lim_{u\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+u}}{2u}=\lim_{u\to0}\frac{u}{2u(1+u)}=\frac{1}{2}.$$

(3) 原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}[(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})]$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{-2}{8x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4}.$$

题型Ⅳ　$0\cdot\infty$ 型未定式的定值法

【解题提示】 $0\cdot\infty\Rightarrow\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设　$\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$，则

$$\lim f(x)g(x)\quad(0\cdot\infty)=\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad\left(\frac{0}{0}\right).$$

注　一般讲，对数函数和反三角函数一般不"下放"，因为下放后的导数比原来的复杂，违背数学运算的原则.

【例 1.28】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}\right)$.

【解】 (1) 原极限 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan\frac{\pi}{2}x}{(1-x)^{-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}{(1-x)^{-2}}=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)^2}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to1}\frac{-2(1-x)}{-2\cos\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}=2\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\pi x}=2\lim_{x\to1}\frac{-1}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

(2) 原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}}{-x^{-2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x)^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

题型 V　1^{∞},0^{0},∞^{0} 型未定式的定值法

【解题提示】 基本思路是通过对数恒等式将其化为 $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$,再用法则.

关于 1^{∞} 型极限有两种求法:

(1) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$(适用于底为 $1\pm f(x)$ 或易化为 $1\pm f(x)$ 形式的幂指函数的极限.其解法:设 $\lim f(x)=0$,$\lim g(x)=\infty$,则 $\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=\mathrm{e}^{\lim g(x)[\pm f(x)]}$.

用语言叙述为:括号中1后的变量(包括符号)与幂乘积的极限就是 1^{∞} 这种未定式极限的幂,其底为 e.

(2) 利用对数恒等式 $\Rightarrow \mathrm{e}^{\infty\cdot\ln 1}=\mathrm{e}^{\infty\cdot 0}\Rightarrow \mathrm{e}^{\left(\frac{\infty}{\infty}或\frac{0}{0}\right)}$.

设　$\lim f(x)=1$,$\lim g(x)=\infty$,则　$\lim[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\ln[f(x)]^{g(x)}}=\mathrm{e}^{\lim g(x)\ln f(x)}$.

(适用于底为单因子的呈 1^{∞} 型幂指函数的极限的求法).

【例 1.29】 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.　(4) $f(x)$ 在 a 处可导,$f(a)\neq 0$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}$.

【解】 (1) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}$.

因为
$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{6},$$

所以原极限 $=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$.

(2) 原极限
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\ln(\arctan x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\ln x}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x}=0.$$

(3) 原极限
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\ln\cot x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x\tan x}{\sin^2 x}}=\mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x^2}}=\mathrm{e}^{-1}.$$

(4) 原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^{n}$.

因为
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{f(a)}\cdot n=\frac{1}{f(a)}\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}},$$

又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)}{\frac{1}{n}}=f'(a)$,于是

原极限 $=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

三、无穷小的阶及极限式中常数值的确定

题型 I　确定无穷小的阶

【解题提示】 一般试题以两种形式出现：① 单项选择题；② 利用 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}$ 为有限数，确定 n（n 可为任何正数），确定 n 时，常用洛毕达法则和等价无穷小代换两种方法.

【例 1.30】 确定如下无穷小的阶 n：

(1) 当 $x\to 0$ 时，$3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 x^n 为同阶无穷小，则 $n=$ ________.

(2) 当 $x\to 1^+$ 时，$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 与 $(x-1)^n$ 为同阶无穷小，则 $n=$ ________.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-4\sin x+\sin x\cos x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-4\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-4\cos x+\cos 2x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x-2\sin 2x}{n(n-1)x^{n-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos x-4\cos 2x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin x+8\sin 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos x+16\cos 2x}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}},$$

当 $n-5=0$ 时，即 $n=5$ 时，极限 $=\dfrac{12}{5!}$，故　取 $n=5$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x}{(x-1)^n}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{x-1}\ln[1+(x-1)]}{(x-1)^n}$

$$\xlongequal{\text{令 } u=x-1}\lim_{u\to 0^+}\frac{\sqrt{3u+4}\sqrt{u}\ln(1+u)}{u^n}=2\lim_{n\to 0^+}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{u^n},$$

当 $n=\dfrac{3}{2}$ 时，其极限 $=2$，故　取 $n=\dfrac{3}{2}$.

【例 1.31】 设 $g(x)=\int_0^1 e^{tx}dt-1$，$f(x)=\int_0^x\sin(t^2)dt$，则当 $x\to 0$ 时，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的　　【　　】

(A) 同阶而非等价无穷小.　　(B) 等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　(D) 低阶无穷小.

【解】 $g(x)=\int_0^1 e^{tx}dt-1\xlongequal{\text{令 } u=tx}\int_0^x e^u\dfrac{du}{x}-1=\dfrac{\int_0^x e^u du-x}{x}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^u du-x}{x\int_0^x\sin(t^2)dt}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\int_0^x\sin(t^2)dt+x\sin(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\sin(x^2)+\sin(x^2)+2x^2\cos(x^2)}=\infty.$$

故 $g(x)$ 是 $f(x)$ 低阶无穷小.

题型Ⅱ　极限式中常数值的确定

【解题提示】　求极限式中的常数值，主要根据极限存在这一前提，利用等价无穷小，洛毕达法则及如下公式：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ n=m\\ 0, & 当\ n<m\\ \infty, & 当\ n>m\end{cases}.$$

有时也用到根式有理化，函数连续的充要条件.

【例 1.32】　(1) 已知 $x\to0$ 时，$\arctan3x$ 与 $\dfrac{ax}{\cos x}$ 是等价无穷小，试确定 a 值.

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^m}=a(\neq0)$，求常数 m,a.

(3) 确定常数，使 $y=x-(a+b\cos x)\sin x$，当 $x\to0$ 时，取得尽可能高阶的无穷小量.

【解】　(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\arctan3x}{ax/\cos x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cos x\cdot3x}{ax}=\dfrac{3}{a}=1\Rightarrow a=3.$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\arctan x-\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^m}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x}}{mx^{m-1}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-4x^2}{mx^{m-1}(1+x^2)(1-x^2)}=-\dfrac{4}{m}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^{m-3}(1+x^2)(1-x^2)}$

$=-\dfrac{4}{m}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{m-3}}=a\Rightarrow\begin{cases}m-3=0\\ -\dfrac{4}{m}=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=3\\ a=-\dfrac{4}{3}\end{cases}.$

(3) $y=x-(a+b\cos x)\sin x$，求其各阶导数，得

$y'=1-a\cos x-b\cos2x$，$y''=a\sin x+2b\sin2x$，$y'''=a\cos x+4b\cos2x$，

令 $x\to0$，得 $y'\to1-a-b$，　$y''\to0$，　$y'''\to a+4b$. 于是

$\begin{cases}1-a-b=0\\ a+4b=0\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{4}{3},b=-\dfrac{1}{3}.$

故由洛毕达法则可知，取 $a=\dfrac{4}{3},b=-\dfrac{1}{3}$ 时，y 取得尽量高阶的无穷小.

【例 1.33】　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1}(a>0), & -1<x<0\\ \dfrac{(m-1)x-m}{x^2-x-1}(m\neq0), & 0\leqslant x\leqslant1\end{cases}$. 问 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

【解】　由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在　$\Leftrightarrow$　$f_-(0)=f_+(0)$，

而　$f_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(m-1)x-m}{x^2-x-1}=m$，

$f_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)(\sqrt{x^2+a^2}+a)(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+a^2}+a)}$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+a^2}+a)} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{m}.$$

【例 1.34】 确定下列各题中的常数：

(1) 设$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax+b)=0$，确定常数 a,b.

(2) 设$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$，求常数 a,b.

(3) 设$\lim\limits_{x\to\infty}[(x^5+4x^4-2)^c-x]=A(\neq 0)$，求 c,A.

【解题提示】 求这种 $x\to\infty$ 时，$\infty-\infty$ 型的极限，通常是从式子中提出 x，于是就将 $\infty-\infty\Rightarrow\infty\cdot 0$ 型，然后再进行逐步分析.

【解】 (1) 原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a+\frac{b}{x}\right]=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}-a+\frac{b}{x}\right)=0 \Rightarrow -1-a=0 \Rightarrow a=-1.$$

原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x+b)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)=-b$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}+1\right)=\lim_{x\to\infty}x\left[-\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}+1\right]$$

$$=-\lim_{x\to\infty}x\left[\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]=-\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(-\frac{1}{3}\ \frac{1}{x^3}\right)=0 \Rightarrow b=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=0$

$\Rightarrow 3-\sqrt{a}=0 \Rightarrow a=9.$

原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{9x^2+bx+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}=2$

$$\xrightarrow{\text{抓大头}} -\frac{b}{6}=2 \Rightarrow b=-12.$$

(3) 原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\dfrac{(x^5+4x^4-2)^c}{x}-1\right]=A$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(x^5+4x^4-2)^c+x}{x}=0 \Rightarrow 5c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{5},$$

于是，原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt[5]{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^5}}-1\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x^5}\right)=\frac{4}{5} \Rightarrow A=\frac{4}{5}.$$

§3　函数的连续性

题型 I　函数连续性的讨论(重点)

【解题提示】因为初等函数在其定义区间内总是连续的,所以关于函数连续性的讨论,主要是针对非初等函数而言的,如某些由极限定义的函数、带绝对值符号的函数、分段函数等等,而且一般是讨论函数在一点处的连续性.讨论函数在一点 x_0 处的连续性时,若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧表达式不相同,则一般是先求 $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限,然后根据函数在点 x_0 连续的充要条件(即 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$)来判断在点 x_0 处是否连续.需要特别强调的是,计算 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 时,只能用 x_0 左边的函数表达式,而计算 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 时,则只能用 x_0 右边的函数表达式;若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的两侧为同一表达式,则直接用 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 来判断在点 x_0 处是否连续.

【例 1.35】 (1) 讨论 $f(x)=\begin{cases}|x-1| & ,|x|>1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2} & ,|x|\leqslant 1\end{cases}$ 的连续性.

(2) 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$ 的连续性($x\geqslant 0$).

【解】 (1) 将 $f(x)$ 改写成　$f(x)=\begin{cases}1-x & ,x<-1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2} & ,-1\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1 & ,x>1\end{cases}$

显然,$f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续.下面讨论 $f(x)$ 在 $x=-1$ 与 $x=1$ 处的连续性.

当 $x=-1$ 时,$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(1-x)=2$,　$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$,

因为 $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$,　故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处间断.

当 $x=1$ 时,$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$,　$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$,

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$,　故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

综上所示,$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ 连续.

(2) 若 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$,则　$\sqrt[n]{2}\leqslant\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}<\sqrt[n]{4}$,

若 $\dfrac{1}{2}<x<2$,则　$2x<\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=2x\sqrt[n]{2(2x)^{-n}+1+2^{-n}x^n}<2x\sqrt[n]{4}$,

若 $2\leqslant x<+\infty$,则　$x^2<\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}=x^2\sqrt[n]{2x^{-2n}+2^nx^{-n}+1}<x^2\sqrt[n]{3}$.

而　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$,

所以 $$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ 2x, & \frac{1}{2}<x<2\\ x^2, & 2\leqslant x<+\infty\end{cases}.$$

而 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right],\left(\frac{1}{2},2\right),[2,+\infty)$ 上是初等函数，所以连续.

又 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=1,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=1,$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=4,\quad \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=4,\quad f(2)=4,$

所以，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

【例 1.36】 (1) 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\begin{cases}x-\pi, x\leqslant 0\\ x+\pi, x>0\end{cases}$，试证在点 $x=0$ 处 $f[g(x)]$ 连续.

(2) 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}(x>0)$ 在定义域内的连续性.

【解】 (1) 根据复合函数的定义有

$$f[g(x)]=\begin{cases}\sin(x-\pi), x\leqslant 0\\ \sin(x+\pi), x>0\end{cases}=\begin{cases}-\sin x, x\leqslant 0\\ -\sin x, x>0\end{cases}=-\sin x,$$

因此 $f[g(x)]$ 处处连续，自然 $f[g(x)]$ 也在 $x=0$ 点处连续.

(2) 当 $0<x\leqslant e$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln e^n\left[1+\left(\frac{x}{e}\right)^n\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}\right)^n\right]}{n}=1,$$

当 $x>e$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x^n\left[1+\left(\frac{e}{x}\right)^n\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln x+\ln\left[1+\left(\frac{e}{x}\right)^n\right]}{n}=\ln x,$$

于是有 $$f(x)=\begin{cases}1 & ,0<x\leqslant e\\ \ln x & ,x>e\end{cases},$$

又 $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=1,\quad \lim\limits_{x\to e^+}f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\ln x=1$，且 $f(e)=1$，

可知 $f(x)$ 在 $x=e$ 点连续，从而 $f(x)$ 在定义域 $x>0$ 上连续.

题型 Ⅱ　确定函数的间断点及其类型

【解题提示】 确定函数的间断点，可按以下步骤进行：

(1) 找出 $f(x)$ 的定义域，若在 $x=x_0$ 点无定义，则 $x=x_0$ 为间断点；若有定义，再检验下一步.

(2) 检查 $x=x_0$ 是否为初等函数定义区间内的点. 若是，则 x_0 为 $f(x)$ 的连续点；否则看 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 x_0 为 $f(x)$ 的间断点；若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，再检查下一步.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则 x_0 为连续点；若不相等，则 $x=x_0$ 为间断点.

最后根据定义，判断间断点的类型.

【例 1.37】 (1) 求 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并指出其类型.

(2) 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0 \\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的间断点，并指出其类型.

【解】 (1) 由 $\ln|x|$ 的定义域知 $x\neq 0$. 又由

$x^2-3x+2=0$ 　得　 $x_1=1,\quad x_2=2.$

而 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(0,1),(1,2),(2,+\infty)$ 内是初等函数，所以连续，故 $f(x)$ 的可能间断点是 $x=0,1,2$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\ln|x|=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+2)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$，

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类.

又 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-1$，所以，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属第一类.

如果我们补充 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义，即令 $f(1)=-1$，这时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处就连续了.

在 $x=2$ 处，因为 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类.

(2) 当 $x<0$ 时，$f(x)=\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}$. 由 $\sin\pi x=0$ 得 $x=-1,-2,-3,\cdots$

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}$. 由 $x^2-1=0$ 解得 $x=1$，

所以 $f(x)$ 在 $x=1,-1,-2,-3,\cdots$ 处间断，在分段点 $x=0$ 处可能间断，在除去以上点的其他区间上 $f(x)$ 是初等函数，故连续.

因为在 $x_0=-2,-3,\cdots$ 处，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\infty$，所以 $x_0=-2,-3,\cdots$，均是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类.

在 $x_0=-1$ 处，$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{\sin\pi x}$

$$\xlongequal{\text{令 } x=y-1}\lim_{y\to 0}\frac{(y-1)(y-2)y}{-\sin\pi y}=-\frac{2}{\pi},$$

所以 $x_0=-1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属第一类.

如果令 $f(-1)=-\dfrac{2}{\pi}$，则 $f(x)$ 在 $x_0=-1$ 处连续.

在 $x_0=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}=-\dfrac{1}{\pi}$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}\right]=-\sin 1$，

所以 $x_0=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，属第一类.

在 $x_0=1$ 处，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在. 所以 $x_0=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

注　只有在函数的可去间断点处修改定义或补充定义函数的值，方可使得函数在该点连续.

【例 1.38】 试确定 a,b 之值，使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断

点 $x=1$.

【解】 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty$，

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\dfrac{a}{1-b}=0$，

所以，当 $a=0,b\neq 1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则当 $a\neq 1,b=e$ 时，以下极限存在：

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\frac{e}{1-a}\left(因为\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=1\right),$$

因此，当 $a\neq 1,b=e$ 时，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

综上所述，当 $a=0,b=e$ 时 $f(x)$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$.

题型 Ⅲ 分段函数式中参数的确定(重点)

【解题提示】 求解此类问题的基本思路是：根据分段函数在其分段点处的性质来确定所含常数的值. 例如，如果已知一函数在某点连续，则根据函数在该点连续的充要条件来求解.

【例 1.39】 (1) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}, & x>0\\ 8, & x=0\\ \dfrac{b\sin x+\int_0^x e^t\mathrm{d}t}{x}, & x<0\end{cases}$ 连续，确定常数 a 与 b.

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$，且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$$ 在 $x=0$ 处连续，确定常数 A.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}x, x\leqslant 1\\ a, x\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}b, & x<0\\ x+2, & x\geqslant 0\end{cases}$，试问 a,b 为何值时，函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续？

(4) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 具有连续导数且 $f(0)=0$，试确定 c 使 $F(x)$ 连续，并讨论 $F'(x)$ 是否连续.

【解】 (1) 因为 $f(x)$ 连续， 所以 $f_-(0)=f_+(0)=f(0)$，

又 $$f_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{b\sin x+\int_0^x e^t\mathrm{d}t}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0^-}(b\cos x+e^x)$$

$$=b+1=f(0)=8\ \Rightarrow\ b=7,$$

$$f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\sin x}{2x}=\frac{a}{2}=f(0)=8\ \Rightarrow a=16.$$

(2) 由题设，$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}+a\dfrac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+a=b+a$，

又　$F(0)=A$，因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 点处连续，所以有 $\lim\limits_{x\to0}F(x)=F(0)$，由此得 $A=b+a$.

(3) 对 $f(x),g(x)$ 在 $x<0,0\leqslant x<1,x\geqslant1$ 上分别求和得

$$F(x)=\begin{cases}x+b, & x<0\\ 2x+2, & 0\leqslant x<1.\\ x+2+a, & x\geqslant1\end{cases}$$

为使 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，只需选择 a,b，使 $F(x)$ 在 $x=0$ 点和 $x=1$ 点连续.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+b)=b$，　$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x+2)=2$，又 $F(0)=2$，

所以当 $b=2$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

同理，$\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(2x+2)=4$，$\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+2+a)=3+a$，

又　$F(1)=3+a$，

当 $3+a=4$ 时，即 $a=1$ 时，$F(x)$ 在 $x=1$ 点连续.

故　　当 $a=1,b=2$ 时，$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

(4) 由洛毕达法则，有　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)}{2x}=\dfrac{f(0)}{2}=0$，

所以当 $c=0$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

当 $x\neq0$ 时，$F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-2\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}$，

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{3x}=$$
$\dfrac{1}{3}f'(0)$，

于是　$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}, & x\neq0,\\ \dfrac{1}{3}f'(0), & x=0\end{cases}$

并且有　$\lim\limits_{x\to0}F'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2xf(x)+x^2f'(x)-2xf(x)}{3x^2}=\frac{1}{3}f'(0)=F'(0),$$

因此 $F'(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

第二章　导数与微分

题型 I　利用导数定义求极限

【解题提示】　导数定义

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (2)$$

由(1),(2)中可得出如下很有用的结论:若右边的极限存在且被减数中对应符号 $f()$ 内的表达式与减数中对应符号 $f()$ 内的表达式之差恰好等于极限式的分母,则该极限就等于函数在指定点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$.

【例 2.1】　设 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}=$ ______;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=$ ______;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\dfrac{1}{2n}\right)\right]=$ ______;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0)-f(x_0+x)}=$ ______;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_0+x_n)-f(x_0-y_n)}{x_n}=$ ______.

(当 $n\to\infty$ 时,x_n,y_n 为等价无穷小)

【解】　(1) 由导数的定义有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{(-3h)}\cdot(-3)=-3f'(x_0).$$

(2) 同理　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0)$.

(3) $$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\frac{1}{2n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\frac{1}{2n}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}f'(x_0).$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0)-f(x_0+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0)-f(x_0+x)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0)-f(x_0+x)}{-x}}(-1)$$

$$=-\frac{1}{f'(x_0)}\quad(f'(x_0)\neq 0).$$

(5) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{x_n}=1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，且 $x_n\sim y_n$，

于是 $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+x_n)-f(x_0-y_n)}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+x_n)-f(x_0-y_n)}{(x_n+y_n)}\cdot\frac{x_n+y_n}{x_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n}{x_n}\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+x_n)-f(x_0-y_n)}{x_n+y_n}$$
$$=2f'(x_0).$$

【例 2.2】 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是　　　　【　　】

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在.

【解】 因为 $$\lim_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim_{h\to+\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)}{\frac{1}{h}}=f'_+(a),$$

所以　(A) 不入选.

又　因为 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 的存在与 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的值看不出有什么联系，即使在 $x=a$ 不连续，以上极限也可能存在.

例如 $$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases},$$

在 $x=0$ 处不连续，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos\frac{1}{h}-\cos\frac{1}{h}}{2h}=0,$$

故(B) 也不入选，类似地可说明(C) 也不入选. 由排除法可知(D) 入选.

注 比较例 2.1 与例 2.2 可知：$f'(x_0)$ 存在，则极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 与 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a-h)-f(a+h)}{h}$ 必存在，反之则不然.

题型 Ⅱ　利用导数定义求函数在某点处的导数

【解题提示】 在函数表达式中含有抽象函数记号，仅知其连续，不知其是否可导，求其导数时必须用导数定义；求分段函数(或带绝对值符号的函数) 在分界点处的导数，必须用导数的定义；对带绝对值符号的函数在求导前一定要先去掉绝对值符号. 某些简单函数在某点处的导数用导数定义求有时也相当方便.

【例 2.3】 求下列函数在指定点处的导数：

(1) $y=f(x)=\arcsin x\cdot\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$，求 $f'(0)$；

(2) 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导，求 $f'(0)$；

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=\frac{1}{3}$,又对任意的 x,有 $f(3+x)=3f(x)$,求 $f'(3)$.

【解】 (1) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xlongequal{\text{因为 } f(0)=0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=1.$

(2) 由 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$,可知 $f(0)=\varphi(a)-\varphi(a)=0$,

因为只说明 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导,没说明 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导,所以求 $f'(0)$ 时必须用导数的定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[\varphi(a+bx)-\varphi(a)]-[\varphi(a-bx)-\varphi(a)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a)}{bx}\cdot b+\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a-bx)-\varphi(a)}{-bx}\cdot b$$

$$=b\varphi'(a)+b\varphi'(a)=2b\varphi'(a).$$

(3) 这里没有给出 $f(x)$ 的具体表达式,又没有说明 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导,所以求 $f'(3)$ 必须用导数定义做.

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3f(\Delta x)-3f(0)}{\Delta x}$$

$$=3\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=3f'(0)=3\times\frac{1}{3}=1.$$

【例 2.4】 (1) 设 $f(x)$ 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上,对任意 x_1,x_2,恒有 $|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant(x_2-x_1)^2$,求 $f'(x)$.

(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上,且对任意的 x,y,恒有 $f(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x)$,$f(0)=0$,$g(0)=1$,$f'(0)=1$,$g'(0)=0$,求 $f'(x)$.

【解】 (1) 不妨设 $x_1\neq x_2$,由已知不等式有

$$0\leqslant\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant|x_2-x_1|.$$

因为 $\lim\limits_{x_2\to x_1}|x_2-x_1|=0$,由夹逼定理有

$$\lim_{x_2\to x_1}\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|=0\ \Rightarrow\ \lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0,$$

由此可知 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 点处可导,且 $f'(x_1)=0$,又由于 x_1 的任意性,故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导,且 $f'(x)\equiv 0$.

(2) $f'(x)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)}{y}$

$$=\lim_{y\to 0}f(x)\frac{g(y)-1}{y}+\lim_{y\to 0}\frac{f(y)g(x)}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}f(x)\frac{g(y)-g(0)}{y-0}+\lim_{y\to 0}g(x)\frac{f(y)-f(0)}{y}$$

$$= f(x)g'(0) + g(x)f'(0) = g(x).$$

【例 2.5】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，对任意 x，均有 $f(x+1) = 2f(x)$，且当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$f(x) = x(1-x^2)$，试判断在 $x=0$ 处，函数 $f(x)$ 是否可导.

【解题提示】 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

【解】 当 $-1 \leqslant x < 0$ 时，$0 \leqslant x+1 < 1$，于是由题设有

$$f(x) = \frac{1}{2}f(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)[1-(x+1)^2] = \frac{1}{2}(x+1)(-2x-x^2),$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{2}(x+1)x(2+x)}{x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(1-x^2)}{x} = 1.$$

因为 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$， 所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

【例 2.6】 设 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 点处连续，试问在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导.

【解题提示】 先去掉绝对值号，再由 $f(x)$ 在 a 处可导的条件 $f'_-(a) = f'_+(a)$ 判别.

【解】 $f(x) = \begin{cases} (x-a)\varphi(x), x-a \geqslant 0, 即\ x \geqslant a \\ (a-x)\varphi(x), x-a < 0, 即\ x < a \end{cases}$.

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^+} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x \to a^+}\varphi(x) = \varphi(a),$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(a-x)\varphi(x)}{x-a} = \lim_{x \to a}[-\varphi(x)] = -\varphi(a),$$

因为 $f'(a)$ 存在的充分必要条件是 $f'_+(a) = f'_-(a)$. 所以要 $f'(a)$ 存在，必须 $\varphi(a) = -\varphi(a) \Rightarrow \varphi(a) = 0$，于是 $f'(a) = 0$.

【例 2.7】 证明下列有关结论.

(1) 设函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，又 $f(x) = \cos\varphi(x)$，$f'(x) = \sin\varphi(x)$，证明：对满足 $\varphi(x) \neq n\pi$ 的一切 x，$\varphi'(x) = -1$；

(2) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且对任意 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ 恒有 $f(x+y) = f(x)f(y)$，$f(x) = 1 + xg(x)$，其中 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处可导.

【证】 (1) 不妨设 $\varphi(x_0) \neq n\pi$，由于 $\varphi(x)$ 的连续性，所以 $\exists \varepsilon > 0$，当 $|x - x_0| < \varepsilon$ 时，$\varphi(x) \neq n\pi$，于是

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\cos\varphi(x)-\cos\varphi(x_0)} \cdot \frac{\cos\varphi(x)-\cos\varphi(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\cos\varphi(x)-\cos\varphi(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\frac{1}{\sin\varphi(x_0)} \cdot f'(x_0)$$

$$= -\frac{1}{\sin\varphi(x_0)} \cdot \sin\varphi(x_0) = -1.$$

由于 x_0 的任意性，故 $\varphi'(x) = -1$.

(2) 因为对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(x) \cdot f(\Delta x) - f(x)$

$$= f(x)[f(\Delta x) - 1] = f(x)\cdot\Delta x\cdot g(\Delta x)\quad(\text{因为 } f(x) = 1 + xg(x)),$$

故 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)g(\Delta x) = f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(\Delta x) = f(x)$.

题型 Ⅲ　利用导数定义求函数方程

【解题提示】 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(x_0)$ 存在是必不可少的前提条件，再附加条件，求 $f(x)$ 的题型一般是：先由附加条件求出 $f(x_0)=0$，再由导数定义写出

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

【例 2.8】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(0) = a(a\neq 0)$ 又对 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，求 $f(x)$.

【解】 在 $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 中令 $y=0$，得

$$f(x) = \frac{f(x)+f(0)}{1-f(0)f(x)}\quad\Rightarrow\quad f(x) - f(0)f^2(x) = f(x) + f(0)$$

$$\Rightarrow\quad f(0)[1+f^2(x)] = 0\quad\Rightarrow\quad f(0) = 0.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)\cdot f(\Delta x)} - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)[1+f^2(x)]}{\Delta x[1-f(x)f(\Delta x)]} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}$$

$$= f'(0)[1+f^2(x)]$$

（因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\Delta x) = f(0) = 0$）

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)} = f'(0)\mathrm{d}x\quad\Rightarrow\quad \arctan f(x) = f'(0)x + C$$

$\Rightarrow$　令 $x=0$　得 $\arctan f(0) = C$　$\Rightarrow$　$C=0$.

故　$\arctan f(x) = f'(0)x = ax$　（因为 $f'(0)=a$），

即　$f(x) = \tan(ax)$.

【例 2.9】 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $f'(1) = a(\neq 0)$，又对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$，有 $f(xy) = f(x)+f(y)$，求 $f(x)$.

【解】 在 $f(xy) = f(x)+f(y)$ 中，令 $y=1$，得 $f(x) = f(x)+f(1)\quad\Rightarrow\quad f(1)=0$，

$$f'(x) = \lim_{y\to 0}\frac{f(x+xy)-f(x)}{xy} = \lim_{y\to 0}\frac{f(x)+f(1+y)-f(x)}{xy}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)}{xy} = \lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}\cdot\frac{1}{x} = f'(1)\cdot\frac{1}{x},$$

即　$f'(x) = \dfrac{a}{x}$（因为 $f'(1)=a$），故 $f(x) = a\ln x + C$.

令　$x=1$，于是　$f(1) = a\ln 1 + C$　$\Rightarrow$　$C=0$，　因此　$f(x) = a\ln x$.

题型Ⅳ 求复合函数的导数

【解题提示】 复合函数求导的关键是搞清函数的复合关系，从外层到里层一层一层地求导，既不重复，又不遗漏。当所给函数既有四则运算，又有复合运算时，应根据所给函数表达式的结构，决定先用四则求导法则，还是先用复合函数求导法则，对于某些形式较复杂的复合函数，可以利用微分形式不变性，将复合函数"换元"而得到较为简单的形式后再求导，最后乘以引入的中间变量的导数.

【例 2.10】 求下列函数的导数：

$$(1)y = f^n[\varphi^m(2^{x^2})];\qquad (2)y = \sqrt[4]{x\sqrt[3]{e^x\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}}.$$

【解】 $(1)y' = nf^{n-1}[\varphi^m(2^{x^2})]\cdot f'[\varphi^m(2^{x^2})]\cdot m\varphi^{m-1}(2^{x^2})\cdot\varphi'(2^{x^2})\cdot 2^{x^2}\cdot\ln2\cdot 2x$

$$= 2\ln2\cdot nm\cdot x\cdot 2^{x^2}f^{n-1}[\varphi^m(2^{x^2})]\cdot\varphi^{m-1}(2^{x^2})\cdot\varphi'(2^{x^2})f'[\varphi^m(2^{x^2})].$$

(2) $y = x^{\frac{1}{4}}\cdot(e^x)^{\frac{1}{12}}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{24}}$，$\ln y = \frac{1}{4}\ln x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{24}\ln\sin\frac{1}{x}$，

$$y' = y\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24x^2}\cot\frac{1}{x}\right) = \sqrt[4]{x\sqrt[3]{e^x\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}}\cdot\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24x^2}\cot\frac{1}{x}\right).$$

【例 2.11】 求下列函数的导数：

$$(1)y = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1};$$

$$(2)y = (\arccos x)^2\left(\ln^2\arccos x - \ln\arccos x + \frac{1}{2}\right),(|x|<1).$$

【解】 (1) 设 $u = \sqrt{1+x^2}$，则 $y = \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}$，

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad y'_u = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right) = \frac{1}{1-u^4},$$

$$故\ y'_x = \frac{1}{1-u^4}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1-(\sqrt{1+x^2})^4}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= -\frac{1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}.$$

(2) 设 $u = \arccos x$，则 $y = u^2\left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2}\right)$，

$$u'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad y'_u = 2u\left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2}\right) + u^2\left(\frac{2\ln u}{u} - \frac{1}{u}\right) = 2u\ln^2 u,$$

$$故\quad y'_x = y'_u\cdot u'_x = (2u\ln^2 u)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\cdot\ln^2\arccos x.$$

【例 2.12】 求下列函数的导数：

$(1)F(x) = \sin x^2\int_0^1 f(t\sin x^2)\,dt$，则 $\frac{dF}{dx}$；

$(2)F(x) = \int_0^{x^2} xf(x-t)\,dt$，求 $\frac{dF}{dx}$；

(3) $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$，求$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$.

【解题提示】 被积函数或其主要部分为抽象的复合函数时，一定要设中间变量，使其为简单形式 $f(u)$，u 为中间变量.

【解】 (1) $\int_0^1 f(t\sin x^2)\mathrm{d}t \xlongequal[\mathrm{d}u=\sin x^2\mathrm{d}t]{\text{令 } u=t\sin x^2} \int_0^{\sin x^2} f(u)\cdot\dfrac{1}{\sin x^2}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{\sin x^2}\int_0^{\sin x^2} f(u)\mathrm{d}u$，

$F(x)=\sin x^2\cdot\dfrac{1}{\sin x^2}\int_0^{\sin x^2} f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\sin x^2} f(u)\mathrm{d}u$，

$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=f(\sin x^2)\cdot\cos x^2\cdot 2x=2x\cos x^2 f(\sin x^2)$.

(2) $F(x)=x\int_0^{x^2} f(x-t)\mathrm{d}t$，

因为$\int_0^{x^2} f(x-t)\mathrm{d}t \xlongequal{u=x-t} \int_x^{x-x^2} f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_{x-x^2}^x f(u)\mathrm{d}u$，

所以 $F(x)=x\int_{x-x^2}^x f(u)\mathrm{d}u$，

故$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\int_{x-x^2}^x f(u)\mathrm{d}u+x[f(x)-f(x-x^2)\cdot(1-2x)]$.

(3) $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t \xlongequal[\mathrm{d}u=-nt^{n-1}\mathrm{d}t]{\text{令 } u=x^n-t^n} \int_{x^n}^0 f(u)\left(-\dfrac{\mathrm{d}u}{n}\right)=\dfrac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)\mathrm{d}u$，

故 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{n}f(x^n)\cdot nx^{n-1}=x^{n-1}f(x^n)$.

【例 2.13】 设$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=g(x)$，$h(x)=x^2$，则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(h(x))$为 【 】

(A) $g(x^2)$. (B) $2xg(x)$. (C) $x^2g(x^2)$. (D) $2xg(x^2)$.

【解】 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[h(x)]=f'[h(x)]\cdot h'(x)=g[h(x)]\cdot(x^2)'=g(x^2)\cdot 2x=2xg(x^2)$，

可知该选(D).

题型 V 求参数方程所确定的函数的导数

【解题提示】 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$\varphi'(t)\neq 0$，$\varphi''(t)$，$\psi''(t)$ 存在，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y')=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}_{\text{关键一步}}.$$

【例 2.14】 设有参数方程 $\begin{cases}x=\displaystyle\int_0^t \frac{u}{(2-u)^4}\mathrm{d}u\\ y=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nt^{n-1}}{2^n}\end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【解】 $y=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^t \dfrac{nt^{n-1}}{2^n}\right)'=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{t}{2}\right)^n\right]'=\left[\dfrac{\frac{t}{2}}{1-\frac{t}{2}}\right]'=\left(\dfrac{t}{2-t}\right)'=\dfrac{2}{(2-t)^2}$，

$$y'_t=\frac{4}{(2-t)^3},\quad x=\int_0^t\frac{u}{(2-u)^4}\mathrm{d}u,\quad x'_t=\frac{t}{(2-t)^4},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4}{(2-t)^3}\Big/\frac{t}{(2-t)^4}=\frac{4(2-t)}{t}=\frac{8}{t}-4,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{8}{t}-4\right)\cdot\frac{(2-t)^4}{t}=\frac{8(2-t)^4}{t^3}.$$

题型 Ⅵ 由极坐标方程所确定的函数的导数

【解题提示】 利用极坐标与直角坐标关系$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$,将极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$,化为参数方程$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$,然后求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$,方法仿参数方程微分法.

【例 2.15】 设$\rho=a(1+\cos\theta)$,求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【解】 将$\rho=a(1+\cos\theta)$,化为参数方程$\begin{cases}x=a(1+\cos\theta)\cos\theta\\y=a(1+\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$,$\theta$为参数.

$$x'_\theta=-a\sin\theta\cos\theta-a(1+\cos\theta)\sin\theta=-a(\sin\theta+\sin2\theta),$$

$$y'_\theta=-a\sin^2\theta+a(1+\cos\theta)\cos\theta=a(\cos\theta+\cos2\theta),$$

故 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'_\theta\Big/x'_\theta=-\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{\sin\theta+\sin2\theta}=-\cot\frac{3}{2}\theta.$$

题型 Ⅶ 隐函数微分法

【解题提示】 常用方法:

1° 方程$F(x,y)=0$两边对x求导.(注意:y是x的函数,y的函数是x的复合函数.例如$\frac{1}{y}$,y^2,$\ln y$,e^y等是x的复合函数,求y对x的导数时要用复合函数的连锁法则)然后将含y'的项放到等式的一端,不含y'的项移到另一端,解出y';

2° 公式法:$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$,其中$F'_x(x,y)$,$F'_y(x,y)$分别为$F(x,y)$对$x$和$y$的偏导数.

【例 2.16】 求下列函数的导数:

(1) 由方程$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$,确定y为x的函数,求$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$;

(2) 由方程组$\begin{cases}x=t^2+2t\\t^2-y+a\sin y=1\end{cases}$$(0<a<1)$确定$y$为$x$的函数,求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

【解】 (1) 方程两边对x求导,得$\cos(xy)(y+xy')+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1$, $(*)$

将$x=0$代入方程$\sin(xy)+\ln(y-x)=x\ \Rightarrow\ \ln y=0\ \Rightarrow\ y=1$.

再将$x=0,y=1$代入$(*)$,得

$$1+y'\Big|_{x=0}-1=1\ \Rightarrow\ y'\Big|_{x=0}=1.$$

(2) 方程组的两个方程的两边对t求导,得

$$\begin{cases} x'_t = 2t+2 \\ 2t - y'_t + a\cos y \cdot y'_t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = 2(t+1) \\ y'_t = \dfrac{2t}{1-a\cos y} \end{cases},$$

于是 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{t}{(t+1)(1-a\cos y)}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{(1-a\cos y)^2 - 2at^2(t+1)\sin y}{2(t+1)^3(1-a\cos y)^3}.$$

题型Ⅷ　分段函数的导数的求法(重点)

【解题提示】 对于分段函数,若函数在各分段的开区间内可导,则按导数的运算法则求导.而在分界点的导数则按导数定义或左、右导数的定义求导(即若 $f(x)$ 在分界点 $x=x_0$ 的两侧表达式一样),则 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;若在 $x=x_0$ 的两侧 $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \geqslant x_0 \\ f_2(x), x < x_0 \end{cases}$,则 $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f_2(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$,则 $f'(x_0) = f'_+(x_0)$,若 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$,则 $f'(x_0)$ 不存在).

【例 2.17】 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$,

其中 $\varphi(x)$ 具有二阶导数,且 $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0$.

(1) 确定 a 的值,使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(2) 求 $f'(x)$;

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi'(x)+\sin x}{1} = \varphi'(0)$,

所以　当 $a = \varphi'(0) = 0$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x \neq 0$ 时,$f'(x) = \dfrac{x[\varphi'(x)+\sin x] - [\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$,

当 $x=0$ 时,$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x} - \varphi'(0)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\cos x - x\varphi'(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)+\sin x - \varphi'(0)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x} + \frac{\sin x}{2x}\right] = \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{1}{2},$$

故　$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi''(0) + \dfrac{1}{2}, & x = 0 \\ \dfrac{x[\varphi'(x)+\sin x] - [\varphi(x)-\cos x]}{x^2}, & x \neq 0 \end{cases}.$$

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[\varphi'(x)+\sin x] - [\varphi(x)-\cos x]}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\varphi'(x)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\cos x}{x^2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)+\sin x}{2x}=\frac{1}{2}+\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)}{2x},$$

所以$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi'(x)}{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi''(0)$
$=f'(0)$,

故 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。

【例 2.18】 设函数 $g(t)$ 连续, $\varphi(x)=\begin{cases}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$,又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)\neq0$,求 $F(x)=f[\varphi(x)]$ 在 $x=0$ 处的导数.

【解】 $F(x)=f[\varphi(x)]=\begin{cases}f\left[\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right], & x\neq0\\ f(0), & x=0\end{cases}$,

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f\left[\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right]-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f\left[\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right]-f(0)}{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-0}\cdot\frac{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}{x}=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}{x}$$

$$=f'(0)\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{1}=f'(0)g(0).$$

【例 2.19】 设 $f(x)=|\ln|x||$,求 $f'(x)$.

【解】 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant1\\ -\ln x, & 0<x<1\\ -\ln(-x), & -1<x<0\\ \ln(-x), & x\leqslant-1\end{cases}$,

显然,当 $x=0$ 时, $f(x)$ 无定义.

当 $x>1$ 时, $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

当 $0<x<1$ 时, $f'(x)=(-\ln x)'=-\frac{1}{x}$,

又 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-\ln x-0}{x-1}=-1$,

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x-0}{x-1}=1$, 故 $f'(1)$ 不存在.

当 $-1<x<0$ 时, $f'(x)=[-\ln(-x)]'=-\frac{1}{x}$,

当 $x<-1$ 时, $f'(x)=[\ln(-x)]'=\frac{1}{x}$,

又 $f'_-(-1)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{\ln(-x)-0}{x+1}=-1$,

$f'_+(-1)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{-\ln(-x)-0}{x+1}=1$, 故 $f'(-1)$ 也不存

在.

$$\text{综上所述 } f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1,\\ -\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1\end{cases}.$$

【例 2.20】 设 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，令 $F(x)=\begin{cases}\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u, & x\leqslant 0\\ \int_{-x}^0 \ln[1+f(x+t)]\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$，

求 $F'(0)$.

【解】 $F'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，

又 $\int_{-x}^0 \ln[1+f(x+t)]\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } u=x+t} \int_0^x \ln[1+f(u)]\mathrm{d}u$，

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \ln[1+f(u)]\mathrm{d}u}{x},$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\ln[1+f(x)]=\ln[1+\lim_{x\to 0^+}f(x)]=\ln 1=0,$$

故 $F'(0)=0$.

题型 Ⅸ 高阶导数的求法

【解题提示】 求高阶导数的方法有：直接法(即求出所给函数的 1～3 或 4 阶导数后，分析所得结果的规律性，写出 n 阶导数)；间接法(即将给定的函数通过四则运算、变量替换，泰勒级数等方法变换后求出 n 阶导数的方法)，间接法是常用方法，务必很好地掌握. 尤其是以下类型.

(1) 分式有理函数的高阶导数，一般是先将有理假分式通过多项式除法化为整式与有理真分式之和，再将有理真分式写成部分分式之和，最后仿 $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$ 写出所给定的有理函数的 n 阶导数.

(2) 三角有理式的高阶导数，一般是利用三角函数中积化和差公式、倍角公式逐次降低函数的次数，变为 $\cos kx$，$\sin kx$ 之和或差形式，再用 $\sin^{(n)}kx=k^n\sin\left(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos^{(n)}kx=k^n\cos\left(kx+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$ 写出函数的 n 阶导数.

(3) 利用函数的泰勒级数展开式，求函数在某点处的高阶导数.

【例 2.21】 求下列各高阶导数：

(1) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$； (2) $y=x^3\ln x$； (2) $y=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$.

【解】 (1) $y=-x^2-x-1+\dfrac{1}{1-x}$，

$$y'=-2x-1+\frac{1}{(1-x)^2};\ y''=-2+\frac{2}{(1-x)^3};\ y'''=\frac{3!}{(1-x)^4};\cdots;$$

$$y^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\ (n\geqslant 3).$$

(2) $y' = 3x^2\ln x + x^2$； $y'' = 6x\ln x + 5x$； $y''' = 6\ln x + 11$； $y^{(4)} = \dfrac{6}{x}$；

$$y^{(5)} = -\frac{6}{x^2};\quad y^{(6)} = 6\,\frac{(-1)(-2)}{x^3};\cdots;\quad y^{(n)} = \frac{6(-1)^n(n-4)!}{x^{n-3}}\quad (n \geqslant 4).$$

(3) $y = \dfrac{1}{x^2-2x-8} = \dfrac{1}{(x-4)(x+2)} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x+2}\right)$，

$$y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{6}\left[\frac{1}{(x-4)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right].$$

【例 2.22】 求下列高阶导数：

(1) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \cos 2x$，求 $f^{(28)}(\pi)$；

(2) $f(x) = \sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$，求 $f^{(n)}(x)$.

【解】 (1) 由公式直接有 $f^{(n)}(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sin\left(\dfrac{x}{2} + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) + 2^n\cos\left(2x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，

故 $$f^{(28)}(\pi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{28}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 28\times\frac{\pi}{2}\right) + 2^{28}\cos\left(2\pi + 28\times\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{28}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 14\pi\right) + 2^{28}\cos(2\pi + 14\pi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{28} + 2^{28}.$$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x = \dfrac{1}{4}\sin 4x\cos 4x\cos 8x = \dfrac{1}{16}\sin 16x$，

$$f^{(n)} = \frac{1}{16}(16)^n\sin\left(16x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 16^{n-1}\sin\left(16x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

【例 2.23】 设 $y = \operatorname{arccot} x$，求 $y^{(n)}(0)$.

【解】 $y' = (\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} = -(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots)$，$|x| < 1$.

所以 $y = \dfrac{\pi}{2} - \left(x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}\cdots\right)$

$$= \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots,\ |x| < 1, \quad ①$$

又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的麦克劳林级数展开式为

$$y = f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad ②$$

对比 ①，② 中 x^n 的系数，得

$$f^{(2k)}(0) = 0,\ f^{(2k+1)}(0) = (2k+1)!\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = (-1)^{k+1}(2k)!.$$

题型 X 杂例

【例 2.24】 设一有理整式 $f(x)$ 满足关系式

$xf''(x) + (1-x)f'(x) + 3f(x) = 0$，且 $f(0) = 1$，试求该整式.

【解】 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$，则

$f'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$；

$f''(x) = n(n-1)a_0x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}$.

因为 $xf''(x) + (1-x)f'(x) + 3f(x) = 0$，

所以 $x[n(n-1)a_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1x^{n-3} + \cdots] + (1-x)[na_0x^{n-1} + (n-$

$1)a_1x^{n-2}+\cdots]+3(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=0$,

比较两边关于 x^n 的系数,得 $3a_0-na_0=0 \Rightarrow n=3$,

于是可设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,

因为 $f(0)=1$,所以 $d=1$,

又 $f'(x)=3ax^2+2bx+c, f''(x)=6ax+2b$,代入已知关系式,

得 $x(6ax+2b)+(1-x)(3ax^2+2bx+c)+3(ax^3+bx^2+cx+1)\equiv 0$

$\Rightarrow (9a+b)x^2+(4b+2c)x+(c+3)=0 \Rightarrow c=-3, b=\dfrac{3}{2}, a=-\dfrac{1}{6}$.

故 $f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-3x+1$.

【例 2.25】 以下结论正确的是 【 】

(A) 设 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处不可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(B) 设 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处不可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(C) 设 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处不可导,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处也不可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 处一定不可导.

(D) 以上结论均不正确.

【解】 (A) 设 $u=\varphi(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处可导,$y=f(u)=|u|$ 在 $u=0$ 处不可导,但复合函数 $y=f[\varphi(x)]=x^2$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 设 $u=\varphi(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导,$y=f(u)=u^2$ 在 $u=0$ 处可导,但复合函数 $y=f[\varphi(x)]=x^2$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 设 $u=\varphi(x)=x+|x|$ 在 $x=0$ 处不可导,而 $y=f(u)=u-|u|$ 在 $u=0$ 处也不可导,但 $y=f[\varphi(x)]=x+|x|-|x+|x||=0$ 却在 $x=0$ 处可导,由排除可知(D)入选.

【例 2.26】 设 $f(x)$ 对于任意的 x 及 a 满足 $\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t=f(x)$,$(a\neq 0)$.

证明:$f(x)$ 是线性函数.

【解题提示】 只需证 $f'(x)=k$(k 为常数)即可.

【证】 由 $f(x)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-a}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t(a\neq 0)$,由连续性的定义易证 $f(x)$ 是连续函数,而 $f(x)$ 作为连续函数的原函数也必定是可导的,且其导数 $f'(x)$ 也连续,依次推理 $f(x)$ 任意阶可导.

原关系式 $\Rightarrow 2af(x)=\displaystyle\int_{x-a}^{x+a}f(t)\mathrm{d}t$,

两边对 a 求导,得 $2f(x)=f(x+a)-f(x-a)\cdot(-1)=f(x+a)+f(x-a)$,

再对 a 求导,得 $f'(x+a)-f'(x-a)=0 \Rightarrow f'(x+a)=f'(x-a)$,

令 $a=x\neq 0 \Rightarrow f'(2x)=f'(0)$. 由此可知无论 $x(\neq 0)$ 为何值,$f'(2x)$ 为一常数,于是 $f'(x)$ 为一常数,不妨设 $f'(x)\equiv k$,则 $f(x)=kx+C$.

即 $f(x)$ 是线性函数.

第三章 不定积分

题型 I 第一换元积分法(凑微分法)

【解题提示】 1.要熟练掌握凑微分法,必须牢记如下几种凑微分形式

(1) $f(ax^n+b)x^{n-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{na}f(ax^n+b)\mathrm{d}(ax^n+b)$	(2) $f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
(3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)$	(4) $f(\ln x)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$
(5) $f(\sqrt{x})\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$	(6) $f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$
(7) $f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$	(8) $f(\tan x)\sec^2x\mathrm{d}x=f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$
(9) $f(\cot x)\csc^2x\mathrm{d}x=-f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$	(10) $\dfrac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$
(11) $\dfrac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$	(12) $\sin 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin^2x)=-\mathrm{d}(\cos^2x)$
(13) $(1+\ln x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\ln x)$	(14) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$
(15) $\left(1+\ln\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{x}\right)$	(16) $\left(1\pm\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(x\mp\dfrac{1}{x}\right)$

2.凑微分法的技巧

对$\int g(x)\mathrm{d}x$,将被积分式$g(x)\mathrm{d}x$写成$f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$或$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$,其中$f(x)$较$\varphi(x)$复杂.对$f(x)$或构成$f(x)$的主要部分求导,若其为$\varphi(x)$的常数倍,即$f'(x)=k\varphi(x)$,则$\varphi(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{k}\mathrm{d}f(x)$,或$\varphi(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{k}\mathrm{d}f_*(x)\mathrm{d}x$.其中$k$为常数,$f_*(x)$为$f(x)$的主要部分.

3.复杂形式的凑微分法

分子、分母同乘(或除)以一个因子,然后再仿前法凑(或凑其中一部分形式).

常乘或除的因子为:$x^n(n=1,2,\cdots)$,e^x,$\ln x$,$\cdots$.

【例 3.1】 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{\ln 2x}{\ln 4x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$; (2) $\displaystyle\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$; (4) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) $I=\displaystyle\int\frac{\ln 2+\ln x}{2\ln 2+\ln x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int\left(1-\frac{\ln 2}{2\ln 2+\ln x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$=\ln x-\int\frac{\ln 2}{2\ln 2+\ln x}\mathrm{d}(2\ln 2+\ln x)=\ln x-\ln 2\cdot\ln(2\ln 2+\ln x)+C$$

$$=\ln x-\ln 2\cdot\ln\ln 4x+C.$$

$$(2)I=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}\right)^{x}}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{x}\right]^{2}-1}=\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\left|\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2(\ln3-\ln2)}\ln\left|\frac{3^{x}-2^{x}}{3^{x}+2x}\right|+C.$$

$$(3)I=\int\frac{1}{(\arcsin x)^{2}}\mathrm{d}(\arcsin x)=-\frac{1}{\arcsin x}+C.$$

$$(4)I=\int\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}}=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})}{\sqrt{(\mathrm{e}^{x})^{2}-1}}+\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})}{1-(\mathrm{e}^{-x})^{2}}$$

$$=\ln(\mathrm{e}^{x}+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1})+\arcsin(\mathrm{e}^{-x})+C.$$

【例 3.2】　求下列不定积分：

$(1)\int\frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$；　　$(2)\int\tan^{5}x\cdot\sec^{3}x\mathrm{d}x$；

$(3)\int\frac{\mathrm{e}^{x}(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；　　$(4)\int\frac{1+\cos x}{1+\sin^{2}x}\mathrm{d}x$.

【解】　$(1)I=\int\frac{(x-1)\arctan\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x-\int\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$

$$=2\int\arctan\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}(\sqrt{x-1})-2\int\frac{\arctan\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^{2}+1}\mathrm{d}(\sqrt{x-1})$$

$$=2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x-2\int\arctan\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x-1})$$

$$=2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x-(\arctan\sqrt{x-1})^{2}+C.$$

$$(2)I=\int\tan^{4}x\sec^{2}x\cdot\tan x\sec x\mathrm{d}x=\int(\sec^{2}x-1)^{2}\sec^{2}x\cdot\mathrm{d}(\sec x)$$

$$=\int(\sec^{6}x-2\sec^{4}x+\sec^{2}x)\mathrm{d}(\sec x)=\frac{1}{7}\sec^{7}x-\frac{2}{5}\sec^{5}x+\frac{1}{3}\sec^{3}x+C.$$

$$(3)I=\int\frac{\mathrm{e}^{x}\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos^{2}\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{x}}{2\cos^{2}\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^{x}\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})=\mathrm{e}^{x}\tan\frac{x}{2}+C.$$

$$(4)I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^{2}x}+\int\frac{\cos x}{1+\sin^{2}x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x+2\sin^{2}x}+\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1+\sin^{2}x}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^{2}x(1+2\tan^{2}x)}+\arctan(\sin x)=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1+(\sqrt{2}\tan x)^{2}}+\arctan(\sin x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+\arctan(\sin x)+C.$$

【例 3.3】　求下列不定积分：

$(1)\int\frac{1}{1-x^{2}}\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$；　　$(2)\int\frac{\ln^{2}(x+\sqrt{1+x^{2}})}{\sqrt{1+x^{2}}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}$；　　(4) $\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}\right]dx$.

【解】 (1) $\frac{1}{1-x^2}$ 与 $\ln\frac{1+x}{1-x}$ 相比，后者复杂，而 $\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{2}{1-x^2}$，

于是　$I=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$

(2) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 与 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 相比，后者复杂，而

$$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

于是　$I=\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]=\frac{1}{3}\ln^3(x+\sqrt{1+x^2})+C.$

(3) 因为 $[\ln(\tan x)]'=\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$，

所以 $I=\int\ln(\tan x)d(\ln(\tan x))=\frac{1}{2}\ln^2(\tan x)+C.$

(4) 因为被积函数的两式均无法积分，所以必须进行通分，通分后有

$$I=\int\frac{f(x)f'^2(x)-f^2(x)f''(x)}{f'^3(x)}dx=\int\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{f'^2(x)-f(x)f''(x)}{f'^2(x)}dx$$

$$=\int\frac{f(x)}{f'(x)}d\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2+C.$$

【例 3.4】　求下列积分：

(1) $\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$；　　(2) $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$；

(3) $\int\frac{1}{1+x^4}dx$；　　(4) $\int\frac{1+x\cot x}{x(1+x\sin x)}dx$.

【解】 (1) $I=\int\frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}dx=-\int\frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}d\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{x}{x-\ln x}+C.$

(2) $I=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int\frac{1}{xe^x(1+xe^x)}d(xe^x)=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)$

$=\ln(xe^x)-\ln(1+xe^x)+C=x+\ln x-\ln(1+xe^x)+C.$

(3) $I=\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)+(1+x^2)}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{-d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{2-\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x+\frac{1}{x}}{\sqrt{2}-\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$$

(4) $I=\int\frac{(1+x\cot x)\sin x}{x\sin x(1+x\sin x)}dx=\int\frac{\sin x+x\cos x}{x\sin x(1+x\sin x)}dx=\int\frac{d(x\sin x)}{x\sin x(1+x\sin x)}$

$$=\int\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{1+x\sin x}\right)d(x\sin x)=\ln|x\sin x|-\ln|1+x\sin x|+C.$$

【例 3.5】 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx$； (2) $\int\frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx$.

【解】 (1) $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$

$$=\sin^4 x+\cos^4 x-\sin^2 x\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2x),$$

$$I=\int\frac{4}{1+3\cos^2 2x}dx=\int\frac{4dx}{\cos^2 2x(3+\sec^2 2x)}=2\int\frac{d(\tan 2x)}{4+\tan^2 2x}$$

$$=\arctan\left(\frac{1}{2}\tan 2x\right)+C.$$

(2) $I=\int e^{-\sin x}\frac{2\sin x\cos x}{\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]^2}dx=\int e^{-\sin x}\frac{2\sin x\cos x}{\left[\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}\right]^2}dx$

$$=8\int e^{-\sin x}\frac{-\sin x d(-\sin x)}{(1-\sin x)^2}\xlongequal{u=-\sin x}8\int e^u\cdot\frac{u du}{(1+u)^2}$$

$$=8\int e^u\left(\frac{1}{1+u}-\frac{1}{(1+u)^2}\right)du=8\left[\int\frac{e^u du}{1+u}-\int\frac{e^u du}{(1+u)^2}\right]$$

$$=8\left[\int\frac{e^u du}{1+u}+\frac{e^u}{1+u}-\int\frac{e^u du}{1+u}\right]=\frac{8e^u}{1+u}+C=\frac{8e^{-\sin x}}{1-\sin x}+C.$$

题型 Ⅱ 第二换元积分法

【解题提示】 常用的有两种变量替换：

(1) 三角代换. 通过这种代换将根式积分化为三角有理式积分.

被积函数中含有根式	相应的三角代换
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$

【例 3.6】 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{(1+x^2)\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$； (2) $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$；

(3) $\int\frac{xdx}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-12}}$； (4) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$.

【解】 (1) $I \xlongequal{x=\sin t} \int \frac{t(1+\sin^2 t)}{\sin^2 t \cdot \cos t}\cos t\mathrm{d}t = \int \frac{t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t + \int t\mathrm{d}t$

$= -\int t\mathrm{d}(\cot t) + \frac{1}{2}t^2 = -t\cot t + \ln|\sin t| + \frac{1}{2}t^2 + C$

$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x + \ln|x| + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C.$

(2) 令 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$I = \int \frac{\tan t\ln(\tan t)}{\sec^3 t}\cdot \sec^2 t\mathrm{d}t = \int \ln(\tan t)\sin t\mathrm{d}t = -\int \ln(\tan t)\mathrm{d}(\cos t)$

$= -\cos t\cdot \ln(\tan t) + \int \cos t\cdot \frac{1}{\tan t}\cdot \frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = -\cos t\cdot \ln(\tan t) + \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$

$= -\cos t\cdot \ln(\tan t) + \ln|\csc t - \cot t| + C = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} + C.$

(3) $\sqrt{x^2+4x-12} = \sqrt{(x+2)-4^2}$，令 $x+2 = 4\sec t$，则 $\mathrm{d}x = 4\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t$.

于是　$I = \int \frac{(4\sec t - 2)}{4\sec t\cdot 4\tan t}\cdot 4\sec t\cdot \tan t\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t$

$= \ln|\sec t + \tan t| - \frac{1}{2}t + C$

$= \ln\left|\frac{x+2}{4} + \frac{\sqrt{x^2+4x-12}}{4}\right| - \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{x+2} + C$

$= \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-12}\right| - \frac{1}{2}\arccos\frac{4}{x+2} + C.$

(4) 令 $x = 2a\sin^2 t$，则 $\mathrm{d}x = 4a\sin t\cos t\mathrm{d}t$，于是

$I = \int 2a\sin^2 t\cdot \frac{\sqrt{2a}\sin t}{\sqrt{2a}\cos t}\cdot 4a\sin t\cos t\mathrm{d}t = 8a^2\int \sin^4 t\mathrm{d}t$

$= 8a^2\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2\mathrm{d}t = a^2\int(3-4\cos 2t+\cos 4t)\mathrm{d}t$

$= 3a^2 t - 2a^2\sin 2t + \frac{1}{4}a^2\sin 4t + C$

$= 3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}} - 2a\sqrt{x(2a-x)} + \frac{a-x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + C.$

(2) 倒代换.（即令 $(x\pm a) = \frac{1}{t}$）

设 m,n 分别为被积函数的分子、分母关于 $(x\pm a)$ 的最高次数，当 $n-m>1$ 时，用倒代换可望成功.

【例 3.7】 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x\,(a>0)$；　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{12}-1}}$；　(3) $\int \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，于是

$I = \int t^4\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = -\int t\sqrt{(at)^2-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2a^2}\int\sqrt{(at)^2-1}\,\mathrm{d}(a^2t^2-1)$

$$=-\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{2}{3}(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3a^2}\left(\frac{a^2}{x^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

另解，令 $x=a\sin t$（略）.

（2）令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，于是

$$I=\int\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^{12}}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{t^5}{\sqrt{1-(t^6)^2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}(t^6)}{1-(t^6)^2}$$

$$=-\frac{1}{6}\arcsin(t^6)+C=-\frac{1}{6}\arcsin\left(\frac{1}{x^6}\right)+C.$$

$$(3)I=\int\frac{1}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-1}}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }x+1=\frac{1}{t}}\int\frac{t^3}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\int\frac{(1-t^2)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\int\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\arcsin t-\arcsin t+C=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2}+C.$$

题型Ⅲ　分部积分法

【解题提示】　分部积分公式 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$，用分部积分法求不定积分关键在于：恰当地将被积函数分成两部分. 选择 u 和 $\mathrm{d}v$ 的原则：① 积分容易者选作 $\mathrm{d}v$；② 求导简单者选作 u，在二者不可兼得情况下，首先要保证前者. 简单的分部积分为如下几种形式.

A. $\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x,\int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x,\int P_n(x)\cos ax\mathrm{d}x$ 型积分，其中 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式，k,a 均为常数. $u,\mathrm{d}v$ 的选取是：$u(x)=P_n(x)$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$（或 $\sin ax\mathrm{d}x,\cos ax\mathrm{d}x$）. 当 $P_n(x)$ 的次数较高时，用如下表格法十分简便快捷.

u 的各阶导数	u	u'	u''	…	$u^{(n-1)}$	$u^{(n)}$	$u^{(n+1)}$
$v^{(n+1)}$ 的各原函数	$v^{(n+1)}$	$\oplus$ $v^{(n)}$	$\ominus$ $v^{(n-1)}$	…	v''	v'	$\updownarrow (-1)^{n+1}$ v

用表规则：

1°　推广的分部积分各项（不包括符号）为从左上到右下错位相乘，最后一项为 $\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x$.

2°　各项符号为"+""−"相间，最后一项的符号为 $(-1)^{n+1}$.

3°　当 $P_n(x)$ 的某阶导数为 0 时，求导和求原函数的工作停止进行.

【例 3.8】　求下列不定积分

(1) $\int(x^3+2x+5)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int(x^2-3x+1)\sin 2x\mathrm{d}x$.

【解】　(1)

x^3+2x+5	$3x^2+2$	$6x$	6	0
e^{-x}	$\oplus$ $-\mathrm{e}^{-x}$	$\ominus$ e^{-x}	$\oplus$ $-\mathrm{e}^{-x}$	$\ominus$ e^{-x}

$$I=-(x^3+2x+5+3x^2+2+6x+6)e^{-x}+C=-(x^3+3x^2+8x+13)e^{-x}+C.$$

(2)

x^2-3x+1	$2x-3$ ⊕	2 ⊖	0 ⊕
$\sin 2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$	$-\frac{1}{4}\sin 2x$	$\frac{1}{8}\cos 2x$

$$I=-\frac{1}{2}(x^2-3x+1)\cos 2x+\frac{1}{4}(2x-3)\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

$$=-\frac{1}{4}(2x^2-6x+1)\cos 2x+\frac{1}{4}(2x-3)\sin 2x+C.$$

B. $\int e^{kx}\sin(ax+b)dx$，$\int e^{kx}\cos(ax+b)dx$ 型积分，其中 k,a,b 均为常数．该积分只要记住如下公式即可．

$$\int e^{kx}\sin(ax+b)dx=\frac{\begin{vmatrix}(e^{kx})' & (\sin(ax+b))'\\ e^{kx} & \sin(ax+b)\end{vmatrix}}{k^2+a^2}+C$$

$$=\frac{e^{kx}[k\sin(ax+b)-a\cos(ax+b)]}{k^2+a^2}+C,$$

$$\int e^{kx}\cos(ax+b)dx=\frac{\begin{vmatrix}(e^{kx})' & (\cos(ax+b))'\\ e^{kx} & \cos(ax+b)\end{vmatrix}}{k^2+a^2}+C.$$

C. $\int P_n(x)\ln x dx$，$\int P_n(x)\arcsin x dx$，$\int P_n(x)\arctan x dx$ 型积分．

① 该型积分，选 $u(x)=\ln x$（或 $\arcsin x,\arctan x$）；$dv=P_n(x)dx$．

② 利用 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$，$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$，可把

$\int P_n(x)\arccos x dx$，$\int P_n(x)\operatorname{arccot} x dx$ 化为 $\int P_n(x)\arcsin x dx$，$\int P_n(x)\arctan x dx$．

③ 当 $\ln x,\arcsin x,\arctan x$ 的次数高于1时，最好先作变量替换化为指数函数、三角函数与多项式乘积的积分，然后用表格法，最后还原变量．

【例 3.9】　求下列积分：

(1) $\int x^3(\ln x)^4 dx$；　　(2) $\int \frac{(\ln x)^3}{x^2}dx$；

(3) $\int x^2\arctan x dx$；　　(4) $\int (\arcsin x)^4 dx$．

【解】　(1) 令 $\ln x=u$，$x=e^u$，$dx=e^u du$，

$$I=\int e^{3u}\cdot u^4 e^u du=\int u^4 e^{4u}du,$$

u^4	$4u^3$ ⊕	$12u^2$ ⊖	$24u$ ⊕	24 ⊖	0 ⊕
e^{4u}	$\frac{1}{4}e^{4u}$	$\frac{1}{16}e^{4u}$	$\frac{1}{64}e^{4u}$	$\frac{1}{256}e^{4u}$	$\frac{1}{1024}e^{4u}$

$$I=\left(\frac{1}{4}u^4-\frac{1}{4}u^3+\frac{3}{16}u^2-\frac{3}{32}u+\frac{3}{128}\right)e^{4u}+C$$

$$\xlongequal{\text{变量还原}} \frac{1}{4}\left(\ln^4 x-\ln^3 x+\frac{3}{4}\ln^2 x-\frac{3}{8}\ln x+\frac{3}{32}\right)x^4+C.$$

(2) 令 $\ln x=u, x=e^u, dx=e^u du$，于是

$$I=\int e^{-2u}\cdot u^3\cdot e^u du=\int e^{-u}u^3 du,$$

u^3	$3u^2$ ⊕	$6u$ ⊖	6 ⊕	0 ⊖
e^{-u}	$-e^{-u}$	e^{-u}	$-e^{-u}$	e^{-u}

$$I=-(u^3+3u^2+6u+6)e^{-u}+C=-(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)\cdot\frac{1}{x}+C.$$

(3) $\int x^2\arctan x dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\int\frac{1}{3}x^3\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2 d(x^2)}{1+x^2}$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$$

(4) 令 $\arcsin x=u, x=\sin u, dx=\cos u du$. 于是

$$I=\int u^4\cos u du,$$

u^4	$4u^3$ ⊕	$12u^2$ ⊖	$24u$ ⊕	24 ⊖	0 ⊕
$\cos u$	$\sin u$	$-\cos u$	$-\sin u$	$\cos u$	$\sin u$

$I=u^4\sin u+4u^3\cos u-12u^2\sin u-24u\cos u+24\sin u+C=(\arcsin^4 x-12\arcsin^2 x+24)x+(4\arcsin^3 x-24\arcsin x)(\sqrt{1-x^2})+C$(变量还原).

【例 3.10】 $\int\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

【解】 $I=\int\frac{(x+a)\ln(x+a)+(x+b)\ln(x+b)}{(x+a)(x+b)}dx=\int\frac{\ln(x+a)}{x+b}dx+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$$=\ln(x+a)\ln(x+b)-\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx+\int\frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$$

$$=\ln(x+a)\ln(x+b)+C.$$

D. 复杂形式的分部积分类型.

三个和三个以上因子乘积的积分若用分部积分法计算必须将被积函数看作两项的乘积：其中一项为原来的因子，另一项为若干因子的乘积.

【例 3.11】 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$；　(2) $\int x\ln(1+x^2)\cdot\arctan x dx$；

(3) $\int\frac{xe^x}{(1-x)^2}dx$；　(4) $\int\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}dx$.

【解题提示】 ① 被积函数中含有对数函数 $\ln x$ 的积分时，一般是这样考虑：先试用凑微分法，不成，用分部积分法. 用分部积分法积分时，通常取 $u=\ln x$. ② 被积函数中即含有对数函数，又含有反三角函数，通常是取 u 为反三角函数.

【解】 (1) $I=-\int \ln x \mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$

$$=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)+C.$$

(2) $\int x\ln(1+x^2)=\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C.$

$$I=\int \arctan x \mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]\cdot\arctan x-\frac{1}{2}\int[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2]\arctan x-\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3]\arctan x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{3}{2}x+C.$$

(3) $I=\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1-x}-\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}+C.$

(4) $I=-\frac{1}{x+2}(x+1)\mathrm{e}^x+\int\frac{1}{x+2}[(x+1)\mathrm{e}^x]'\mathrm{d}x$

$$=-\frac{x+1}{x+2}\mathrm{e}^x+\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^x}{x+2}+C.$$

题型 Ⅳ　分式有理函数的积分

【解题提示】 (1) 有理分式函数的积分程序:① 将被积函数(如果是假分式的话)通过多项式的除法化为整式与真分式之和的形式,再将真分式分解成部分分式之和;② 分项积分,即得有理分式函数的积分.

(2) 次数较高的有理分式函数的积分最好先分析被积函数的特点,采用凑微分法或变量替换法.

【例 3.12】 计算如下不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}$;　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$;　(3) $\int\frac{1-x^8}{x(1+x^8)}\mathrm{d}x$;

(4) $\int\frac{x^3-2x+1}{(x-2)^{100}}\mathrm{d}x$;　(5) $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 令 $x=\frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 则

$$I=\int\frac{t^4}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{t^4}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^4-1+1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=-\int\frac{(t^2-1)(t^2+1)+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{3}t^3+t-\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+C.$$

(2) $I=\int\frac{x^9\mathrm{d}x}{x^{10}(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{10}\int\frac{1}{x^{10}(1+x^{10})^2}\mathrm{d}(x^{10})$

$$\xlongequal{令 u=x^{10}}\frac{1}{10}\int\frac{1}{u(1+u)^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\int\frac{u+1-u}{u(u+1)^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\int\left[\frac{1}{u(u+1)}-\frac{1}{(u+1)^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{10}\int\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}-\frac{1}{(u+1)^2}\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{10}\left(\ln|u|-\ln|u+1|+\frac{1}{u+1}\right)+C$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{10}\ln(1+x^{10})+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C.$$

(3) $I=\int\frac{(1-x^8)x^7}{x^8(1+x^8)}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int\frac{1-x^8}{x^8(1+x^8)}\mathrm{d}(x^8)\xlongequal{令 u=x^8}\frac{1}{8}\int\frac{1-u}{u(1+u)}\mathrm{d}u$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{1+u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{8}[\ln u-2\ln(1+u)]+C$$

$$=\frac{1}{8}[\ln x^8-2\ln(1+x^8)]+C=\ln|x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^8)+C.$$

(4) 令 $x-2=\frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，则

$$I=\int t^{100}\left[\left(\frac{1+2t}{t}\right)^3-2\left(\frac{1}{t}+2\right)+1\right]\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int t^{98}\left(\frac{1}{t^3}+\frac{6}{t^2}+\frac{10}{t}+5\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int(t^{95}+6t^{96}+10t^{97}+5t^{98})\mathrm{d}t=-\left(\frac{t^{96}}{96}+\frac{6}{97}t^{97}+\frac{5}{49}t^{98}+\frac{5}{99}t^{99}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{(x-2)^{96}}-\frac{6}{97}\cdot\frac{1}{(x-2)^{97}}-\frac{5}{49}\cdot\frac{1}{(x-2)^{98}}-\frac{5}{99}\cdot\frac{1}{(x-2)^{99}}+C.$$

(5) $I=\int\frac{x^{2n}\cdot x^{n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{x^{2n}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}(x^n)\xlongequal{令 x^n=u}\frac{1}{n}\int\frac{u^2\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{u^2+1-1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\int\left[\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{(1+u^2)^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{n}\arctan u-\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2},$$

由递推公式 $\int\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}=\frac{1}{2(2-1)}\left(\frac{u}{u^2+1}+\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\right)$，

故 $I=\frac{1}{n}\arctan u-\frac{1}{n}\left[\frac{u}{2(u^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan u\right]+C$

$$=\frac{1}{2n}\arctan u-\frac{u}{2n(u^2+1)}+C=\frac{1}{2n}\arctan(x^n)-\frac{x^n}{2n(x^{2n}+1)}+C.$$

题型Ⅴ　简单无理函数的积分

【解题提示】　无理函数的积分，一般是通过选择变量替换，去掉根号，化为有理函数的积分．最常见的积分为$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\cdots,\sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$，其解法：令$t^N=\frac{ax+b}{cx+d}$，$N$为$n_1,n_2,\cdots,n_k$的最小公倍数，化为有理函数的积分．

注　① 解题时先将无理函数的分子或分母有理化；

② 能用凑微分法尽量用．

【例 3.13】　求下列不定积分：

$$(1)I=\int\frac{x^5}{\sqrt[4]{x^3+1}}\mathrm{d}x;\qquad (2)I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$$

【解】　$(1)I=\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt[4]{x^3+1}}\mathrm{d}(x^3)=\frac{1}{3}\int\frac{x^3+1-1}{\sqrt[4]{x^3+1}}\mathrm{d}(x^3)$

$$=\frac{1}{3}\int(x^3+1)^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}(x^3)-\frac{1}{3}\int(x^3+1)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}(x^3)$$

$$=\frac{4}{21}(x^3+1)^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{4}}+C.$$

$$(2)I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}}=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\int\frac{\mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$$

题型Ⅵ　三角有理式的积分

【解题提示】　对这类积分的基本思路如下所述．

(1) 尽量使分母简单．为此，或分子分母同乘以某个因子(或利用公式$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$，$1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$)，把分母化为$\sin^k x$(或$\cos^k x$)的单项式，或将分母整个看成一项．

(2) 尽量使三角有理式$R(\sin x,\cos x)$的次数降低，为此通常利用倍角公式或积化和差公式达到目的．

(3) 利用变量替换化为有理函数的积分．

常见的积分类型及所作的变量替换如下所述．

(1) $\int R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x,\int R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x,\int R(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x$，

分别令$\sin x=t,\cos x=t,\tan x=t$．

(2) 若$R(\sin x,\cos x)=R(-\sin x,-\cos x)$，则$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x\xrightarrow{令\tan x=t}\int R_*(t)\mathrm{d}t$，$R_*(t)$为$t$的有理函数．

(3) 一般的三角有理函数的不定积分，作"万能置换"令 $\tan\frac{x}{2}=t$ 总可以化为 t 的有理函数的积分. 因为有理函数的积分很繁琐，除非迫不得已，一般不作"万能置换". 但如下积分 $\int\frac{1}{a+b\sin x}dx,\int\frac{1}{a+b\cos x}dx$ 又非作"万能置换"不可. 牢记如下公式：

$$\boxed{\tan\frac{x}{2}=t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}}$$

A. "1" 的妙用

【例 3.14】 求下列不定积分：

(1) $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$；　　(2) $\int\frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}dx$.

【解】 (1) $I=\int\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}\,dx=\int\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$

$$=\int(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x+C.$$

(2) $\frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^5 x}=\frac{1}{\sin x\cos^5 x}+\frac{1}{\sin^3 x\cos^3 x}$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^5 x}+\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos^3 x}=\frac{\sin x}{\cos^5 x}+\frac{2}{\sin x\cos^3 x}+\frac{1}{\sin^3 x\cos x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^5 x}+2\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^3 x}+\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^5 x}+\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\frac{6}{\sin 2x}+\frac{\cos x}{\sin^3 x},$$

故 $I=-\int\frac{1}{\cos^5 x}d(\cos x)-2\int\frac{1}{\cos^3 x}d(\cos x)+6\int\csc 2x\,dx+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}$

$$=\frac{1}{4}\cos^{-4}x+\cos^{-2}x+3\ln|\csc 2x-\cot 2x|-\frac{1}{2}\sin^{-2}x+C.$$

B. 利用 $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$，$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ 简化分母

【例 3.15】 求下列不定积分：

(1) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；　　(2) $\int\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\sin x+\cos x}dx$.

【解】 (1) $I=\int\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx$

$$=\int x\,d\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}+C.$$

(2) $I=\int\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\cos x+\sin x}dx=\int\frac{\tan\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$

$$=\int\frac{\tan\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)}dx=\int\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$= \int \left[1 - \frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}}\right] d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \tan\frac{x}{2} - \ln\left(1+\tan\frac{x}{2}\right) + C.$$

C. 被积函数的分子、分母为 $\sin x, \cos x$ 的线性组合的积分：$I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx$ 的计算

解法：令 $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a\sin x + b\cos x) + B(a\sin x + b\cos x)'$，其中 A、B 为待定常数，可通过比较等式两边关于 $\sin x, \cos x$ 的系数确定. 于是

$$I = Ax + B\ln|a\sin x + b\cos x| + C.$$

【例 3.16】 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x} dx$； (2) $\int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x} dx$.

【解】 (1) 令 $7\cos x - 3\sin x = A(5\cos x + 2\sin x) + B(5\cos x + 2\sin x)'$，

比较两边关于 $\cos x$ 的系数：$7 = 5A + 2B$
比较两边关于 $\sin x$ 的系数：$-3 = 2A - 5B$ $\Rightarrow$ $A = 1, B = 1$，

故 $I = x + \ln|5\cos x + 2\sin x| + C$.

(2) 令 $\cos x = A(a\cos x + b\sin x) + B(a\cos x + b\sin x)'$，

比较两边关于 $\cos x$ 的系数：$1 = aA + bB$
比较两边关于 $\sin x$ 的系数：$0 = bA - aB$ $\Rightarrow$ $A = \frac{a}{a^2+b^2}, B = \frac{b}{a^2+b^2}$，

故 $I = \frac{1}{a^2+b^2}[ax + b\ln|a\cos x + b\sin x|] + C$.

D. 形如 $\int \sin mx \cos nx\, dx$，$\int \sin mx \sin nx\, dx$，$\int \cos mx \cos nx\, dx$ 的积分

解法：先用积化和差公式进行降幂，再积分.

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

【例 3.17】 求积分 $\int \sin x \sin\frac{x}{2} \sin\frac{x}{3} dx$.

【解】 $I = \frac{1}{2}\int \sin x\left(\cos\frac{x}{6} - \cos\frac{5}{6}x\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin x\cos\frac{x}{6} - \sin x\cos\frac{5}{6}x\right)dx$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\sin\frac{5}{6}x + \sin\frac{7}{6}x - \sin\frac{x}{6} - \sin\frac{11}{6}x\right)dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{11}\cos\frac{11}{6}x - \frac{1}{7}\cos\frac{7}{6}x - \frac{1}{5}\cos\frac{5}{6}x + \cos\frac{x}{6}\right) + C.$$

E. 形如 $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ 的积分

解法：1° 若 m, n 均为偶数，则利用公式：

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

先降幂，再积分.

2°　若 m,n 中有一个为奇数，不妨设 n 为奇数，则

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = \int \sin^m x\cos^{n-1}x\cos x\,dx = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\,d(\sin x)$$

$$\xlongequal{\text{令}\sin x = u} \int u^m(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}du.$$

题型 Ⅶ　杂例

【例 3.18】　求如下不定积分：

(1) 设 $y(x-y)^2 = x$，求 $\int \frac{1}{x-3y}dx$；

(2) 设 $y^3(x+y) = x^3$，求 $\int \frac{1}{y^3}dx$.

【解】　(1) 令 $x-y=t$，则 $y=x-t$ 代入 $y(x-y)^2 = x$，得

$$(x-t)t^2 = x \quad\Rightarrow\quad x=\frac{t^3}{t^2-1},\ y=\frac{t}{t^2-1},\ dx=\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}dt,$$

$$I=\int \frac{1}{\frac{t^3}{t^2-1}-\frac{3t}{t^2-1}}\cdot\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}dt=\int\frac{t^2-1}{t(t^2-3)}\cdot\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}dt=\int\frac{t}{t^2-1}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t^2-1|+C=\frac{1}{2}\ln|(x-y)^2-1|+C.$$

(2) 令 $y=tx$ 代入原方程，得 $t^3x^3(x+tx)=x^3$，$xt^3(1+t)=1$，

得　$x=\frac{1}{t^3(1+t)}$，　$y=\frac{1}{t^2(1+t)}$，　$dx=\frac{-(4t+3)}{t^4(1+t)^2}dt$，

$$I=\int\frac{dx}{y^3}=\int\frac{-t^6(1+t)^3(4t+3)}{t^4(1+t)^2}dt=-\int(3t^2+7t^3+4t^4)dt$$

$$=-\left(t^3+\frac{7}{4}t^4+\frac{4}{5}t^5\right)+C=-\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{7}{4}\frac{y^4}{x^4}+\frac{4}{5}\frac{y^5}{x^5}\right)+C.$$

【例 3.19】　设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int\varphi(x)dx$.

【解】　因为 $f(x^2-1)=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}$，　所以 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

又　$f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x \quad\Rightarrow\quad \frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x \quad\Rightarrow\quad \varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$，

于是　$\int\varphi(x)dx=\int\frac{x+1}{x-1}dx=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx=x+2\ln|x-1|+C.$

【例 3.20】　设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2$ 及 $f(0)=0$，求 $\int_0^1 f(x)dx$.

【解】　$I=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=f(1)-\int_0^1 x\arcsin(x-1)^2dx$，

而　$f(1)=\int_0^1 f'(x)dx+f(0)=\int_0^1\arcsin(x-1)^2dx$. 于是

$$I=\int_0^1(1-x)\arcsin(x-1)^2dx=-\int_0^1(x-1)\arcsin(x-1)^2dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin(x-1)^2d[(x-1)^2]\xlongequal{\text{令}u=(x-1)^2}\frac{1}{2}\int_0^1\arcsin u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left[u\arcsin u\Big|_0^1-\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-u^2}\Big|_0^1\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

【例 3.21】 设 $f'(\mathrm{e}^x)=a\sin x+b\cos x(a^2+b^2\neq 0)$，求 $f(x)$.

【解】 $\int f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int(a\sin x+b\cos x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow\quad f(\mathrm{e}^x)=a\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x+b\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=a\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^x)' & (\sin x)'\\ \mathrm{e}^x & \sin x\end{vmatrix}}{2}+b\frac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^x)' & (\cos x)'\\ \mathrm{e}^x & \cos x\end{vmatrix}}{2}+C$$

$$=\frac{a}{2}(\sin x-\cos x)\mathrm{e}^x+\frac{b}{2}(\cos x+\sin x)\mathrm{e}^x+C$$

$$=\frac{\mathrm{e}^x}{2}[(a+b)\sin x+(b-a)\cos x]+C,$$

故　$f(x)=\frac{x}{2}[(a+b)\sin(\ln x)+(b-a)\cos(\ln x)]+C.$

【例 3.22】 在什么条件下，积分 $\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\mathrm{d}x$ 表示有理函数？

【解】 由 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}$，

可知，当 $A_1\neq 0,B_1\neq 0$ 时，$\frac{A_1}{x},\frac{B_1}{x-1}$ 的积分为对数函数，因此要使该积分为有理函数，必须

$$A_1=B_1=0,$$

故　$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\frac{B_2}{(x-1)^2},$$

$$ax^2+bx+c\equiv A_2x(x-1)^2+A_3(x-1)^2+B_2x^3.$$

令　$x=0$，得 $A_3=c$，　①

　　$x=1$，得 $B_2=a+b+c$.　②

并结合比较 x^3,x^2 的系数，得

$x^3:A_2+B_2=0$，　③

$x^2:A_3-2A_2=a$.　④

由 ①,②,③,④ 可得所求条件为 $a+2b+3c=0$.

第四章　定积分

题型 I　利用定积分定义和性质求解的题型

A. 求极限

【解题提示】 ① 直接利用定积分定义求极限(适用于:每项可提出因子$\frac{1}{n}$,而剩余的各项之和可用一个通式表示的 n 项和的极限);② 利用夹逼定理求极限(适用于:极限式为被积函数中含有以 n 为指数幂的定积分). 注意:用该法解题时除以 n 为指数幂的因子保持不变外,其余应将其放大或缩小;③ 利用积分中值定理求极限;④ 同时利用夹逼定理和定积分定义求极限.

【例 4.1】 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\cos\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\cos\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n}\cos\frac{n}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$;(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$;(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 因为当 $n\to\infty$ 时,$\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$,

所以 $$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\cos\frac{k}{n}\right)\frac{\pi}{n}=\pi\int_0^1 x\cos x\mathrm{d}x=\pi(\cos 1+\sin 1-1).$$

(2) 因为$\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\frac{1}{n}\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}$.

所以$\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)<\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}<\frac{1}{n}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$,

于是 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n},$$

又 因为 $$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\frac{3}{2}.$$

(3) 因为$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sin\xi\int_n^{n+p}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sin\xi\cdot\ln\frac{n+p}{n}$,$n\leqslant\xi\leqslant n+p$,

又 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+p}{n}=0$,$|\sin\xi|\leqslant 1$,

故 $$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0.$$

(4) 因为 $0<\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}<x^n$, 所以 $0<\int_0^1\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$,

又 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{x^n\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=0$.

【例 4.2】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0,g(x)$ 非负，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

【解】 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，又由于 $f(x)>0$，所以 $M\geqslant m>0$. 再由于 $g(x)$ 非负，于是有

$$\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

又 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1,$

故 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

B. 定积分的估值

定积分的估值问题是指确定常数 m,M，使 $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$ 成立. 其中 M 要求尽可能小，m 尽可能大，即 M,m 分别接近于 $f(x)$ 的上下确界.

【解题提示】 ① 或者求出被积函数在 $[a,b]$ 上的最值，定出 $f(x)$ 的范围；或者用不等式的放缩法写出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的界限；或者二者结合得出 $f(x)$ 的适当范围；② 用估值定理或比较定理进行分析处理.

【例 4.3】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=3$，且对于 $[0,1]$ 上的一切 x 和 y，$|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$ 成立，试估计积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

【解】 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$|f(x)-f(0)|\leqslant|x-0|=|x|=x$，

即 $\quad|f(x)-3|\leqslant x\iff 3-x\leqslant f(x)\leqslant 3+x,$

于是 $\int_0^1(3-x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(3+x)\mathrm{d}x,$

又由于 $\quad\int_0^1(3-x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2},\quad\int_0^1(3+x)\mathrm{d}x=\dfrac{7}{2},$

故 $\quad\dfrac{5}{2}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{7}{2}.$

【例 4.4】 估计下列积分值：

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2+x^3}}$.

【解】 (1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\dfrac{\cos x}{x^2}(x-\tan x),$

因为在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上，$\tan x>x,\cos x>0$，所以 $f'(x)<0$.

可知 $f(x)$ 是单调减函数. 于是，$\dfrac{2}{\pi}=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi},$

故 $\quad\dfrac{1}{2}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2}{\pi}\mathrm{d}x<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},$

即 $\quad\dfrac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sin^2 x},\quad f'(x)=\dfrac{-2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^2}<0,x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right].$

可知 $f(x)$ 是单调减函数. $\frac{4}{7}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}$,

故 $\frac{4}{7}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$,

即 $\frac{\pi}{21}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{18}$.

(3) 因为 $4\geqslant 4-x^2+x^3\geqslant 4-x^2, x\in[0,1]$,

所以 $\frac{1}{\sqrt{4}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$,

于是 $\frac{1}{2}=\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$,

即 $\frac{1}{2}\leqslant\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2+x^3}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\pi}{6}$.

C. 不等式的证明

【例 4.5】 证明 $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

【证】 令 $f(x)=\frac{1}{x}$,因为 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,所以 $f(x)$ 单调减少,于是

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1}f(x)\mathrm{d}x&=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\\&<\int_1^2 f(1)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(2)\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}f(n)\mathrm{d}x\\&=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\end{aligned}$$

即 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

又
$$\begin{aligned}1+\int_1^n f(x)\mathrm{d}x&=1+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x\\&>1+\int_1^2 f(2)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(3)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n f(n)\mathrm{d}x\\&=1+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

即 $1+\ln n>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,

故 $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$.

【例 4.6】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,证明:

$$\ln\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 把 $[a,b]$ 分成 n 等份,因为 $f(x)>0$,由算术平均值不小于其几何平均值,于是有

$$\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)\geqslant\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)},$$

不等式两边取自然对数,有

$$\ln\left[\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right]\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k),$$

由于 $f(x)$ 及 $\ln f(x)$ 的连续性，于是有

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n}\right]\geqslant\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln f(x_k)\cdot\frac{b-a}{n},$$

故 $\ln\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\geqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\mathrm{d}x.$

题型Ⅱ　利用变上限积分的可微性求解的题型

【解题提示】解题时要牢记如下几个公式.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x\in[a,b]$，则变上限积分有

(1) $F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=f(x)$；

(2) $F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{\phi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=f[\phi(x)]\cdot\phi'(x)$；

(3) $F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=f[\phi(x)]\phi'(x)-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$；

(4) $F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^{\phi(x)} f(t)g(x)\mathrm{d}t\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\int_a^{\phi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)$

$$=g'(x)\int_a^{\phi(x)}f(t)\mathrm{d}t+g(x)f[\phi(x)]\cdot\phi'(x).$$

注　若告知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，通常是证明命题的一个很好的辅助函数.

【例 4.7】　设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，求

$$F(x)=\int_1^x\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)\mathrm{d}t\ (x\geqslant 1)\text{ 的最小值.}$$

【解】　$F(x)=\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t-\int_1^x\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)f(t)\mathrm{d}t,$

$$F'(x)=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t+\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)-\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)$$

$$=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

由 $f(x)>0$，$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t>0$（因为 $x\geqslant 1$），令 $F'(x)=0$，得 $\frac{1}{x}=\frac{2}{x^2}\ \Rightarrow\ x=2.$

又当 $1\leqslant x<2$ 时，$F'(x)=\frac{x-2}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t<0$；当 $x>2$ 时，

$F'(x)=\frac{x-2}{x^2}\int_1^x f(t)\mathrm{d}t>0,$

所以 $x=2$ 为 $F(x)$ 的极小值点，由于其唯一性，所以也是 $F(x)$ 的最小值点，故

$F(2)=\int_1^2\left[(1+\ln 2)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)\mathrm{d}t$ 为 $F(x)$ 的最小值.

【例 4.8】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x\in(a,b)$，证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t\right]=f(x)-f(a).$$

【证】　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在，显然 $F(a)=0$. 由变上限积分的可导性，有 $F'(x)=f(x)$.

又 $$\int_a^x f(t+h)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 }u=t+h}\int_{a+h}^{x+h}f(u)\mathrm{d}u=\int_a^{x+h}f(u)\mathrm{d}u-\int_a^{a+h}f(u)\mathrm{d}u$$

故 $$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(a+h)-F(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)-[F(a+h)-F(a)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).$$

【例 4.9】　设 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上可导，且 $f(x)>0$，又有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf(x)]\leqslant -kf(x)$（$k$ 为一个常数），证明：在 $[a,+\infty)$ 内，有 $f(x)\leqslant Ax^{-k-1}$，其中 A 为一个与 x 无关的常数.

【证】　由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf(x)]\leqslant -kf(x)$，即 $f(x)+xf'(x)\leqslant -kf(x)$，

于是 $$\frac{f'(x)}{f(x)}\leqslant\frac{-k-1}{x}\ \Rightarrow\ \int_2^x\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_2^x\frac{-k-1}{x}\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow\ \ln\frac{f(x)}{f(2)}\leqslant\ln\left(\frac{x}{2}\right)^{-k-1}\Rightarrow f(x)\leqslant f(2)\cdot2^{k+1}\cdot x^{-k-1}=Ax^{-k-1}\text{，其中 }A=f(2)\cdot2^{k+1}.$$

【例 4.10】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对于任意两点 $x,y,x\neq y$ 有 $\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$，求 $f(x)$.

【解】　$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]\ \Rightarrow\ 2\int_x^y f(t)\mathrm{d}t=(y-x)[f(x)+f(y)],$$

令　$x=a$，则　$2\int_a^y f(t)\mathrm{d}t=(y-a)[f(a)+f(y)]$.

由变上限积分的可导性，可推出 $f(y)$ 也可导，上式两边对 y 求导，得

$$2f(y)=f(a)+f(y)+(y-a)f'(y)$$

$$\Rightarrow\ (y-a)f'(y)=f(y)-f(a)\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{f(y)-f(a)}=\frac{\mathrm{d}y}{y-a}$$

$$\stackrel{\text{积分}}{\Rightarrow}\ \ln[f(y)-f(a)]=\ln(y-a)+\ln C$$

$$\Rightarrow\ f(y)-f(a)=C(y-a),\quad\text{令}\quad y=b,\quad\text{得}\quad C=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

故 $$f(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

【例 4.11】　求下列极限：

(1) 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，求 $\lim_{h\to0^+}\int_{-1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 求 $\lim_{h\to0}\int_{-h}^h\frac{1}{h}\left(1-\frac{|x|}{h}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x$，$(h>0)$.

【解】(1) 由于 $f(x)$ 为抽象函数，$\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x$ 不易积分，因此考虑用积分中值定理.

因为 $\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{-h^{\frac{1}{2}}}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-h^{\frac{1}{2}}}^{h^{\frac{1}{2}}}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{h^{\frac{1}{2}}}^{1}\frac{hf(x)}{h^2+x^2}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{由积分中值定理}} f(\xi_1)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-h^{\frac{1}{2}}}+f(\xi_2)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-h^{\frac{1}{2}}}^{h^{\frac{1}{2}}}+f(\xi_3)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{h^{\frac{1}{2}}}^{1},$$

其中　$-1\leqslant\xi_1\leqslant-h^{\frac{1}{2}},-h^{\frac{1}{2}}\leqslant\xi_2\leqslant h^{\frac{1}{2}},h^{\frac{1}{2}}\leqslant\xi_3\leqslant1.$

由于　$\lim\limits_{h\to0^+}f(\xi_1)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-h^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{h\to0^+}f(\xi_1)\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}\right)=0,$

$\lim\limits_{h\to0^+}f(\xi_3)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{h^{\frac{1}{2}}}^{1}=\lim\limits_{h\to0^+}f(\xi_3)\left(\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}\right)=0,$

$\lim\limits_{h\to0^+}f(\xi_2)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-h^{\frac{1}{2}}}^{h^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{h\to0^+}f(\xi_2)\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}+\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}\right)=\pi f(0),$

故　原极限 $=\pi f(0)$.

(2) $\int_{-h}^{h}\frac{1}{h}\left(1-\frac{|x|}{h}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x$

$=\int_{-h}^{h}\frac{1}{h}\left(1-\frac{|x|}{h}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)\mathrm{d}x$

$$\xlongequal[\text{奇偶函数积分性质}]{\text{利用对称区间上}} 2\int_0^h\frac{1}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^h\frac{h-x}{h^2}\cos x\mathrm{d}x,$$

故　原极限 $=\lim\limits_{h\to0}\frac{h\int_0^h\cos x\mathrm{d}x-\int_0^h x\cos x\mathrm{d}x}{h^2}\quad\left(\frac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\int_0^h\cos x\mathrm{d}x+h\cos h-h\cos h}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{\cos h}{2}=\frac{1}{2}.$$

【例 4.12】已知 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^{2x}xf(t)\mathrm{d}t+2\int_x^0 tf(2t)\mathrm{d}t=2x^3(x-1)$，求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最值.

【解】先求出 $f(x)$，在此原方程的两端对 x 求导：

左端 $=\left[x\int_0^{2x}f(t)\mathrm{d}t+2\int_x^0 tf(2t)\mathrm{d}t\right]'_x=\int_0^{2x}f(t)\mathrm{d}t+2xf(2x)-2xf(2x)$

$=\int_0^{2x}f(t)\mathrm{d}t,$

右端 $=[2x^3(x-1)]'_x=8x^3-6x^2.$

$\Rightarrow\int_0^{2x}f(t)\mathrm{d}t=8x^3-6x^2$，两端再对 x 求导，得

$2f(2x)=24x^2-12x\ \Rightarrow\ f(2x)=6x(2x-1)=3\cdot2x(2x-1)$

$\Rightarrow\ f(x)=3x(x-1).$

再求 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最值.

$f'(x)=6x-3,\quad$ 令 $f'(x)=0\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{2},$

$f(0)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}, f(2)=6,$

比较可知　$f(2)=6, f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}$ 分别为 $f(x)$ 的最大与最小值.

【例 4.13】　设 $f(x)$ 可导，且有 $f'(x)+xf'(x-1)=4$，又

$$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t-1)\mathrm{d}t=x^3+x^2+2x, \text{求 } f(x).$$

【解】　$\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}\xlongequal{\text{令 } u=xt}\int_0^x f(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u,$

由题设的方程可得　$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+x\int_0^x f(t-1)\mathrm{d}t=x^4+x^3+2x^2,$

两边对 x 求导，得　$f(x)+\int_0^x f(t-1)\mathrm{d}t+xf(x-1)=4x^3+3x^2+4x,$

再对 x 求导，得　$f'(x)+f(x-1)+f(x-1)+xf'(x-1)=12x^2+6x+4,$

又由题设　$f'(x)+xf'(x-1)=4$，　得　$2f(x-1)=12x^2+6x$

$\Rightarrow\quad f(x-1)=6x^2+3x,$

故　$f(x)=6(x+1)^2+3(x+1)=6x^2+15x+9.$

【例 4.14】　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} \text{ 在 } [0,+\infty) \text{ 上单调增加.}$$

【证】　因为 $F'(x)=\dfrac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2}=f(x)\cdot\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}>0,$

故　$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

题型 Ⅲ　被积函数含有绝对值符号的定积分的计算

【解题提示】　作积分运算之前去掉绝对值号. 其方法是令绝对值号内的式子等于"0"，求出在积分区间内的根，再据此把积分区间分成若干个子区间，于是各子区间上的被积函数的绝对值就去掉了，然后利用定积分的可加性，分段进行计算.

【例 4.15】　求下列定积分：

(1) $\int_{-2}^4\left(x^2-3|x|+\frac{1}{|x|+1}\right)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-2}^3\left|x^2+5|x|-2\right|\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^\pi\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}|t-x|\sin t\mathrm{d}t}{|x|^3}$.

【解】　(1) $I=\int_{-2}^0\left(x^2+3x+\frac{1}{-x+1}\right)\mathrm{d}x+\int_0^4\left(x^2-3x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-\ln(1-x)\right)\Big|_{-2}^0+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\ln(1+x)\right)\Big|_0^4$

$=-\left(-\frac{8}{3}+\frac{3}{2}\times 4-\ln 3\right)+\frac{64}{3}-\frac{3}{2}\times 16+\ln 5=-6+\ln 15.$

(2) 显然被积函数为偶函数，所以积分可化为

$$I=\int_{-2}^{2}|x^2+5|x|-2|\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}|x^2+5|x|-2|\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^2(x^2+5x-2)\mathrm{d}x+\int_2^3(x^2+5x-2)\mathrm{d}x$$

$$=2\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-2x\right)\Big|_0^2+\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x\right)\Big|_2^3=34\,\frac{1}{6}.$$

(3) $I=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x(1-\sin^2x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x)=\frac{4}{3}.$$

(4) 原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^{2x}\left|1-\frac{t}{x}\right|\sin t\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令 }u=\frac{t}{x}}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^2|1-u|\,x\sin xu\,\mathrm{d}u$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\int_0^1(1-u)\sin xu\,\mathrm{d}u+\int_1^2(u-1)\sin xu\,\mathrm{d}u\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1-\cos2x}{x}+\frac{\sin2x-2\sin x}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1-\cos2x}{x^2}+\frac{\sin2x-2\sin x}{x^3}\right]=1.$$

题型Ⅳ　利用奇偶函数与周期函数的性质简化定积分计算

【解题提示】 (1) 凡遇对称区间上的积分，首先要想到的是验证被积函数 $f(x)$ 的奇偶性. 是，则用奇、偶函数的积分性质计算；不是，则作负变换：$x=-u$，然后再进行计算.

(2) 积分上、下限出现 π，被积函数 $f(x)$ 中出现三角函数的题型，首先要考虑是否可用周期性积分的性质：$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$，其中 a 为任意常数，T 为连续函数 $f(x)$ 的周期.

【例 4.16】 求下列定积分：

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，对于任意的 x,y，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，求 $\int_{-l}^{l}f(x)\cdot(1+\cos x)\mathrm{d}x$；

(2) 求 $\int_{-2}^{2}\frac{8x^7+x^4+4x^3+5x^2-3x-2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(3) 求 $\int_{-\ln2}^{\ln2}\frac{x^2\tan x+\mathrm{ch}x}{16+9\mathrm{sh}^2x}\mathrm{d}x$；

(4) 求 $\int_a^{a+\pi}\sin^2 2x\cdot(\tan x+1)\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 令 $y=0$，由题设条件 $f(x+0)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$，又 $0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)$，即 $f(-x)=-f(x)$. 所以 $f(x)$ 为奇函数，由于 $(1+\cos x)$ 为偶函数，所以 $(1+\cos x)f(x)$ 为奇函数，故所求积分 $=0$.

(2) 因为 $\frac{8x^7+4x^3-3x}{1+x^2}$ 为奇函数，$\frac{x^4+5x^2-2}{1+x^2}$ 为偶函数，

所以$\int_{-2}^{2}\frac{8x^7+4x^3-3x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$，

于是，原积分$=2\int_0^2\frac{x^4+5x^2-2}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^2\left(x^2+4-\frac{6}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{64}{3}-12\arctan 2.$

(3) 因为$\frac{x^2\tan x}{16+9\mathrm{sh}^2x}$为奇函数，$\frac{\mathrm{ch}x}{16+9\mathrm{sh}^2x}$为偶函数，

所以原积分$=2\int_0^{\ln 2}\frac{\mathrm{ch}x}{16+9\mathrm{sh}^2x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^{\ln 2}\frac{1}{4^2+(3\mathrm{sh}x)^2}\mathrm{d}(3\mathrm{sh}x)$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{3\mathrm{sh}x}{4}\right)\Big|_0^{\ln 2}=\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{9}{16}\right).$

(4) 由于$\sin^2 2x$和$\tan x$均是以π为周期的周期函数，再由周期函数积分的性质，有

原积分$I=\int_0^{\pi}(\tan x+1)\sin^2 2x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\tan x+1)\sin^2 2x\mathrm{d}x$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

题型Ⅴ　由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的被积函数的积分

【解题提示】　这类题的一般解法是作变量替换.常用的变量替换是：

积分限为$[a,\pi]$，则令$u=\pi-x$，

积分限为$\left[a,\frac{\pi}{2}\right]$，则令$u=\frac{\pi}{2}-x$，

积分限为$\left[a,\frac{\pi}{4}\right]$，则令$u=\frac{\pi}{4}-x$.

【例 4.17】　设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

$$\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x.$$

【证】　显然$f(|\cos x|)$为周期函数，π为其周期，于是

$$\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x\right],$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x\xlongequal{令u=\pi-x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}f[|\cos(\pi-u)|](-\mathrm{d}u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos u|)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x,$$

故　$\int_0^{2\pi}f(|\cos x|)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(|\cos x|)\mathrm{d}x.$

【例 4.18】　计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.

【解】　(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x}{4-\sin x-\cos x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}\mathrm{d}x.$

因为$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx \xlongequal{u=\frac{\pi}{2}-x} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{10}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{4-\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\cdot(-du)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{10}x}{4-\cos x-\sin x}dx,$$

所以 $I=0$.

(2)$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx \xlongequal{u=\frac{\pi}{4}-x} \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right](-du)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan u}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan u}\right]du=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2du-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan u)du=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx,$$

故　$I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

题型 Ⅵ　被积函数中含“变上限积分”的积分

【解题提示】　思路之一，用分部积分法，取变上限积分为 u，其余的部分取作 dv；思路之二，将原积分化为二重积分，再更换累次积分次序.

【例 4.19】　求下列积分：

(1) 设 $f(x)=\int_x^1 e^{-y^2}dy$，计算 $I=\int_0^1 x^2 f(x)dx$；

(2) $I=\int_1^3\left(\int_{x-1}^2 e^{y^2}dy\right)dx.$

【解】　(1)$I=\int_0^1 x^2\left(\int_x^1 e^{-y^2}dy\right)dx=\frac{1}{3}x^3\int_x^1 e^{-y^2}dy\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}(-e^{-x^2})dx$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 x^2e^{-x^2}d(x^2)\xlongequal{令 u=x^2}\frac{1}{6}\int_0^1 ue^{-u}du=\frac{1}{6}(u+1)e^{-u}\Big|_1^0=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e^2}\right).$$

(2) $I=x\int_{x-1}^2 e^{y^2}dy\Big|_1^3+\int_1^3 xe^{(x-1)^2}dx=-\int_0^2 e^{y^2}dy+\int_1^3 xe^{(x-1)^2}dx.$

$$\int_1^3 xe^{(x-1)^2}dx\xlongequal{令 x-1=u}\int_0^2(u+1)e^{u^2}du=\int_0^2 ue^{u^2}du+\int_0^2 e^{u^2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{u^2}d(u^2)+\int_0^2 e^{u^2}du=\frac{1}{2}(e^4-1)+\int_0^2 e^{y^2}dy.$$

故　$I=-\int_0^2 e^{y^2}dy+\frac{1}{2}(e^4-1)+\int_0^2 e^{y^2}dy=\frac{1}{2}(e^4-1).$

题型 Ⅶ　被积函数的分母为两项，而分子为分母中其中一项的积分

【解题提示】　作变量替换，使分母不变，而分子为分母中另一项的积分. 对前后两积分求和即可得所求积分值.

【例 4.20】　求下列定积分：

(1) 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；　(2) 计算 $I=\int_0^2\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x$；

(3) 计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^{1999}}$.

【解】 (1) $I\xlongequal{令u=\frac{\pi}{2}-x}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}(-\mathrm{d}u)$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos u}{\cos u+\sin u}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x,$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad 故\quad I=\frac{\pi}{4}.$$

(2) $I=\int_0^2\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x\xlongequal[u=2-x]{令4-x=u+2}\int_2^0\frac{\sqrt{u+2}}{\sqrt{u+2}+\sqrt{4-u}}(-\mathrm{d}u)$

$$=\int_0^2\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x,$$

$$2I=\int_0^2\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{d}x=2,\quad 故\quad I=1.$$

(3) $I\xlongequal{u=\frac{\pi}{2}-x}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{1}{1+\left[\cot\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]^{1999}}(-\mathrm{d}u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(\tan u)^{1999}}\mathrm{d}u$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{(\cot u)^{1999}}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cot u)^{1999}}{1+(\cot u)^{1999}}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cot x)^{1999}}{1+(\cot x)^{1999}}\mathrm{d}x,$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+(\cot x)^{1999}}{1+(\cot x)^{1999}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad 故\quad I=\frac{\pi}{4}.$$

题型Ⅷ　定积分等式的证明技巧

【解题提示】 根据被积函数或其主要部分的不同情况采用不同的证明方法.

A. 换元法(适用于被积函数或其主要部分仅给出连续条件的命题)

解题程序:① 利用定积分与积分变量无关的特性,改写等式一端的积分变量 u;② 比较等式两边的被积函数或其主要部分,或分析比较等式两端的积分上、下限,确定所作的变量替换: 1° 若等式一端的被积函数或其主要部分为 $f(x)$,而另一端为 $f[\varphi(u)]$,则令 $x=\varphi(u)$;2° 若等式一端为 $f(x)$,另一端为 $f(u)$,则作何变量替换由两端的积分上、下限确定.(注:三角函数例外,一端为 $f(\sin x)$,另一端为 $f(\sin u)$,因为 $f(\sin u)=f[\sin(\pi-u)]$,所以可令 $x=\pi-u$.)

【例 4.21】 设函数 $f(x)$ 连续,则 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$,并计算积分 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}\mathrm{d}x$.

【分析】 由于定积分与积分变量无关,所以 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin u)\mathrm{d}u$,

比较 $f(\sin x)$ 与 $f(\sin u)=f[\sin(\pi-u)]$,可知应令　$x=\pi-u$.

【证】 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-u} \int_{\pi}^{0}(\pi-u)f[\sin(\pi-u)](-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi}(\pi-u)f(\sin u)\mathrm{d}u$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

$$I = \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}[\arctan(-1)-\arctan 1] = \frac{\pi^2}{4}.$$

【例 4.22】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 在关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称的点处取相同的值. 试证：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$

【分析】 由题设 $f(x)$ 在关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称的点处取相同值，所以

$$f\left[\frac{a+b}{2}-\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right] = f(x) = f\left[\frac{a+b}{2}+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right] = f(a+b-x).$$

【证】 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$

由欲证结论可知，只要证出 $\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x$，命题即可得证.

因为 $\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(a+b-x)\mathrm{d}x \xlongequal{令 t=a+b-x} \int_{\frac{a+b}{2}}^{a} f(t)(-\mathrm{d}t)$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$$

所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$

【例 4.23】 证明 $\int_0^x e^{xt-t^2}\mathrm{d}t = e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t.$

【分析】 $\int_0^x e^{xt-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{4}}\mathrm{d}t = \int_0^x e^{\frac{x^2-u^2}{4}}\mathrm{d}u,$

比较 e^{xt-t^2} 与 $e^{\frac{x^2-u^2}{4}}$，可知应令 $xt-t^2 = \frac{1}{4}(x^2-u^2)$

$$\Rightarrow 4t^2-4xt+(x^2-u^2)=0 \Rightarrow t=\frac{x+u}{2} \text{ 或 } t=\frac{x-u}{2}.$$

【证】 $\int_0^x e^{xt-t^2}\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=\frac{x+u}{2}} \int_{-x}^{x} e^{x\left(\frac{x+u}{2}\right)-\left(\frac{x+u}{2}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} e^{\frac{x^2-u^2}{4}}\mathrm{d}u$

$$= \int_0^x e^{\frac{x^2}{4}-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t = e^{\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}}\mathrm{d}t.$$

【例 4.24】 证明：$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x.$

【分析】 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x = \int_0^1 u^n(1-u)^m\mathrm{d}u,$

比较 x^m 与 $(1-u)^m$，可知应令 $x=1-u$.

【证】 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x \xlongequal{令x=1-u} \int_1^0 (1-u)^m u^n(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^n(1-u)^m\mathrm{d}u$

$$=\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x.$$

【例 4.25】 证明：$\int_0^4 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x=2\int_0^2 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x$.

【分析】 $\int_0^4 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x+\int_2^4 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x$，比较欲证结果，可知只需证

$$\int_2^4 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{e}^{u(4-u)}\mathrm{d}u,$$

比较两边 $\mathrm{e}^{x(4-x)}$ 与 $\mathrm{e}^{u(4-u)}$ 可知，欲作的变换只能由两边的积分上、下限去分析得到.

由 $\begin{array}{c|cc} x & 2 & 4 \\ \hline u & 0 & 2 \end{array}$ 可知，应令　$x=4-u$.

【证】 $\int_0^4 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x+\int_2^4 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x$，　①

因为 $\int_2^4 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x \xlongequal{令x=4-u} \int_2^0 \mathrm{e}^{u(4-u)}(-\mathrm{d}u)=\int_0^2 \mathrm{e}^{u(4-u)}\mathrm{d}u=\int_0^2 \mathrm{e}^{x(4-x)}\mathrm{d}x$，　②

由①，②即得命题所证.

B. 分部积分法（适用于被积函数中含有 $f'(x)$，$f''(x)$ 或变上限积分的命题）

【例 4.26】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 $\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x=x(1-x)f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1(1-2x)f'(x)\mathrm{d}x$

$$=-\left[(1-2x)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(-2)f(x)\mathrm{d}x\right]=f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\ \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(1)+f(0)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x.$$

【例 4.27】 设 $\varphi(x)$ 为可微函数 $y=f(x)$ 的反函数，且 $f(1)=0$，证明：

$$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 $\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=x\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\Big|_0^1-\int_0^1 x\varphi[f(x)]\cdot f'(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{f(1)}\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{因为f(1)=0} -\left[x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 2xf(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

C. 辅助函数法（适用于积分限中存在一点 ξ 或 x_0，使等式成立的命题的证明）

【解题提示】 证题程序：① 将命题中的 ξ 或 x_0 改写成 x，移项使等式一端为零，则另一端即为所作的辅助函数 $F(x)$ 或 $F'(x)$；② 验证 $F(x)$ 满足零值定理或洛尔定理；③ 由零值或洛尔定理即得命题的证明.

注 1° 将命题中的 ξ 或 x_0 改写成 x，移项后等式一端为"0"，另一端的表达式易验证在区间 $[a,b]$ 的端点值异号，则令另一端的表达式为 $F(x)$，此即为所作的辅助函数. 若不易验证另一端的表达式在 $[a,b]$ 的端点值异号，则令另一端的表达式为 $F'(x)$，积分之，得辅助函数 $F(x)$.

2° 辅助函数 $F(x)$ 仅通过代数运算而得出，用零值定理证明命题；辅助函数 $F(x)$ 的求作是通过一次积分运算的，用洛尔定理证明命题.

【例 4.28】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明：在 (a,b) 内 $\exists$ 一个 ξ，使得

$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$

由 $f(x)$ 的连续性及变上限与变下限积分的性质可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又 $F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t<0$，(因为 $f(x)>0$)

$$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_b^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0,\text{(因为 } f(x)>0)$$

可知 $F(x)$ 满足零值定理，于是 $\exists$ 一个 $\xi\in(a,b)$，使

$$F(\xi)=0,\text{即}\quad\int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t-\int_\xi^b f(t)\mathrm{d}t=0,$$

亦即 $\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$

又 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=2\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$，

故 $\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

【例 4.29】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)$ 非负，证明：$\exists$ 一个 $x_0\in(0,1)$，使得

$$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

【分析】 $x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ xf(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow\ F(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t,F(0)=0f(0)-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\leqslant 0,$

$F(1)=1\cdot f(1)-\int_1^1 f(t)\mathrm{d}t=f(1)\geqslant 0$，不易验证 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足零值定理，

于是，改令 $F'(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\ \Rightarrow\ F'(x)=\left(x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right)'_x\ \Rightarrow\ F(x)=x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$

【证】 令 $F(x)=x\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$. 显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又

$$F(0)=0,\quad F(1)=1\cdot\int_1^1 f(t)\mathrm{d}t=0,$$

可知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 满足洛尔定理，于是，$\exists x_0\in(0,1)$，使得

$$F'(x_0)=0,\quad\text{即}\quad\int_1^{x_0} f(t)\mathrm{d}t+x_0f(x_0)=0,$$

故　　$x_0 f(x_0)=\int_{x_0}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$

D. 泰勒公式法(适用于被积函数具有二阶和二阶以上连续导数的命题)

【解题提示】 证题程序:① 作辅助函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$;② 将 $F(x)$ 在所需点处(一般根据右边表达式确定展开点)展成泰勒公式;③ 对泰勒余项作适用处理(一般利用介值定理).

【例 4.30】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微,其中 $a<0<b$,则在该区间上 ∃ 一个 ξ^*,使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2 f'(b)-a^2 f'(a)]+\frac{1}{3!}(b^3-a^3)f''(\xi^*)$.

【证】 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$F(a)=0,\quad F'(x)=f(x),\quad F''(x)=f'(x),\quad F'''(x)=f''(x).$

将 $F(x)$ 在 $x=t(a\leqslant t\leqslant b)$ 处展成二阶泰勒公式:

$F(x)=F(t)+F'(t)(x-t)+\frac{1}{2!}F''(t)(x-t)^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi)(x-t)^3$,$\xi$ 在 x,t 之间,

即　$F(x)=F(t)+f(t)(x-t)+\frac{1}{2!}f'(t)(x-t)^2+\frac{1}{3!}f''(\xi)(x-t)^3.$　　①

令 $x=0,t=a$,则 ①⇒

$F(0)=F(a)+f(a)(-a)+\frac{1}{2!}f'(a)a^2+\frac{1}{3!}f''(\xi_1)(-a)^3;$　　②

令 $x=0,t=b$,则 ①⇒

$F(0)=F(b)+f(b)(-b)+\frac{1}{2!}f'(b)b^2+\frac{1}{3!}f''(\xi_2)(-b)^3;$　　③

②－③ 得

$F(b)-F(a)=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2 f'(b)-a^2 f'(a)]+\frac{1}{3!}[b^3 f''(\xi_2)-a^3 f''(\xi_1)].$

令 $m=\min\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$,$M=\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}$,并注意到 $-a^3>0$(因为 $a<0$),于是

$m(b^3-a^3)\leqslant b^3 f''(\xi_2)-a^3 f''(\xi_1)\leqslant M(b^3-a^3)$,

由于 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,于是存在 ξ^*,使　$\frac{b^3 f''(\xi_2)-a^3 f''(\xi_1)}{b^3-a^3}=f''(\xi^*)$,

故　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=bf(b)-af(a)-\frac{1}{2!}[b^2 f'(b)-a^2 f'(a)]+\frac{1}{3!}(b^3-a^3)f''(\xi^*).$

题型 Ⅸ　定积分不等式的证明技巧

证题过程中常用的不等式:

(1)$a>0$,则 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$;

(2)$a^2+b^2\geqslant 2ab$;

(3) 柯西－许瓦兹不等式:$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)$,其中 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

A. 辅助函数法(适用于只言明被积函数连续，而没有告知可导的命题)

解题程序：① 作辅助函数 $F(x)$(方法：将欲结论中的积分上限(或下限)换成 x，式中相同的字母也换成 x，移项使不等式一端为 0，则另一端的表达式即为所作的辅助函数 $F(x)$)；

② 求 $F(x)$ 的导数 $F'(x)$，并判别 $F(x)$ 的单调性；

③ 求 $F(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 的端点值 $F(a)$，$F(b)$，其中必有一个为"0"，由 ② 可推出 $F(b)>F(a)$(或 $F(b)<F(a)$)，从而得出命题的证明.

【例 4.31】 证明下列不等式：

$$(1)\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x>\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x;\qquad (2)\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x\geqslant\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x.$$

【证】 (1) 令 $F(x)=\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t-\int_0^x\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t$，

因为 $F'(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$，　$F''(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}>0$，　$(x>0)$

所以 $F'(x)$"↑"，又 $F'(0)=0$，当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，

因此　$F(x)$"↑"，又 $F(0)=0$，

故　$F(1)>F(0)=0$，即　$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x>\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x$.

$$(2)\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x\xlongequal{令x=\pi+u}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+u)^2}\cos^2(\pi+u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+u)^2}\cos^2u\mathrm{d}u=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+x)^2}\cos^2x\mathrm{d}x,$$

于是　$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x\geqslant\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x\ \Leftrightarrow\ \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+x)^2}\cos^2x\mathrm{d}x$，

令　$F(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\cos^2t\mathrm{d}t-\int_0^x\mathrm{e}^{-(\pi+t)^2}\cos^2t\mathrm{d}t$，

$$F'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x-\mathrm{e}^{-(\pi+x)^2}\cos^2x=(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-(\pi+x)^2})\cos^2x\geqslant0,$$

所以　$F(x)$"↑"，又 $F(0)=0$.

故　$F(\pi)\geqslant F(0)=0$，即　$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+x)^2}\cos^2x\mathrm{d}x$，

亦即　$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x\geqslant\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x$.

【例 4.32】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，$f(x)>0$，证明：对于满足 $0<\alpha<\beta<1$ 的任何 α,β，有　$\beta\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x$.

【分析】 $\beta\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ \beta\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\mathrm{d}x>0$，

将 β 换成 $x(x\geqslant\alpha)$，于是辅助函数 $F(x)=x\int_0^{\alpha}f(t)\mathrm{d}t-\alpha\int_{\alpha}^{x}f(t)\mathrm{d}t$.

【证】 令　$F(x)=x\int_0^{\alpha}f(t)\mathrm{d}t-\alpha\int_{\alpha}^{x}f(t)\mathrm{d}t$，　$(x\geqslant\alpha)$

$$F'(x)=\int_0^{\alpha}f(t)\mathrm{d}t-\alpha f(x)=\int_0^{\alpha}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{\alpha}f(x)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\alpha}[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t>0,\ (因为\ f(x)\ 单减)$$

所以　$F(x)$“↑”，

又　因为　$F(\alpha)=\alpha\int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}t>0(\alpha>0,f(x)>0)$，

所以　$F(\beta)>0$，即 $\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，

故　$\beta\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x>\alpha\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.

【例 4.33】　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，且单调不增，证明：任给 $\alpha\in(0,1)$ 有

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

【分析】　$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$，

若令　$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，

则　$F'(x)=f(x)-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t$，无法判别其符号！

从另一角度出发，把左边的积分也换成右边的积分上、下限，为此

$$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }x=\alpha t}\int_0^1 f(\alpha t)\alpha\mathrm{d}t=\alpha\int_0^1 f(\alpha t)\mathrm{d}t,$$

于是　$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f(\alpha t)\alpha\mathrm{d}t\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow\alpha\int_0^1[f(\alpha t)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

令　$F(x)=\alpha\int_0^x[f(\alpha t)-f(t)]\mathrm{d}t$，

$F'(x)=\alpha[f(\alpha x)-f(x)]\geqslant 0$　（因为 $\alpha\in(0,1)$，$f(x)$ 单调不增）.

【证】　令 $F(x)=\alpha\int_0^x[f(\alpha t)-f(t)]\mathrm{d}t$，　$F'(x)=\alpha[f(\alpha x)-f(x)]$，

因为 $\alpha\in(0,1)$，$x\geqslant\alpha>0$，$\alpha x<x$，又 $f(x)$ 单调不增，

所以 $f(\alpha t)\geqslant f(x)$，

于是　$F'(x)\geqslant 0$，$F(x)$“↑”，又 $F(0)=0$，

故　$F(1)\geqslant F(0)=0$，　即　$\alpha\int_0^1[f(\alpha t)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0$，

亦即　$\alpha\int_0^1 f(\alpha x)\mathrm{d}t\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，　故　$\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

B. 利用拉格朗日微分中值定理或积分中值定理或公式：$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$ 进行分析（适用于：题设被积函数 $f(x)$ 一阶可导，又至少有一个端点的函数值为“0”的命题的证法）

【解题提示】　(1) 用拉格朗日中值定理证题的程序：

① 写出含这个端点的拉氏中值定理；

$f(x)=f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi)$，

$f(x)=f(x)-f(b)=(x-b)f'(\xi)$.

② 再根据题意进行不等式的放缩；

③ 最后用定积分的比较定理、估值定理或函数的绝对值不等式等定积分性质作分析处理.

注 1° $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又知 $f(a)=0$（或 $f(b)=0$），用拉氏定理分析证明的命题是最常用的方法.

2° 若有 $f(a)=f(b)=0$，则应写出

$f(x)=f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi_1),a<\xi_1<x$,

$f(x)=f(x)-f(b)=(x-b)f'(\xi_2),x<\xi_2<b$.

3° 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 应写成 $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x=\cdots$.

（2）积分法的解题程序：

① 写出如下等式

$$f(x)\xlongequal{\text{当} f(a)=0} f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \text{ 或 } f(x)-f(\xi)=\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t;$$

② 利用定积分比较定理、估值定理或绝对值不等式分析.

【例 4.34】 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=f(2)=1$，且 $|f'(x)|\leqslant 1$，试证：

$$1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3.$$

【证】 由拉格朗日微分中值定理有

$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)(x-0)$，$\xi_1\in(0,x)$，

$f(x)-f(2)=f'(\xi_2)(x-2)$，$\xi_2\in(x,2)$.

又 $|f'(x)|\leqslant 1$，所以有

$|f(x)-f(0)|\leqslant x \Leftrightarrow 1-x\leqslant f(x)\leqslant 1+x$，$x\in[0,1]$，

$|f(x)-f(2)|\leqslant 2-x \Leftrightarrow x-1\leqslant f(x)\leqslant 3-x$，$x\in[1,2]$，

故 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=1$,

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(1+x)\mathrm{d}x+\int_1^2(3-x)\mathrm{d}x=3$,

于是 $1\leqslant\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant 3$.

【例 4.35】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $|f'(x)|\leqslant M$ 及 $f(a)=0$，试证：

$$M\geqslant\frac{2}{(a-b)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

【证】 由拉格朗日微分中值定理，有

$$f(x)\xlongequal{f(a)=0} f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi),\quad a<\xi<x.$$

由于 $|f'(x)|\leqslant M \Rightarrow |f(x)|\leqslant M(x-a)$，于是

$$\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b(x-a)\mathrm{d}x=M\cdot\frac{1}{2}(x-a)^2\Big|_a^b=\frac{M}{2}(b-a)^2,$$

又 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$，故 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2$，

即 $M\geqslant\frac{2}{(a-b)^2}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

【例 4.36】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导函数，证明：对于 $x\in[0,1]$，有

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)\mathrm{d}t.$$

【证】 因为 $f(t)$ 连续，$|f(t)|$ 也连续，所以由积分中值定理有

$$\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = |f(\xi)|, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

又 $f(x) - f(\xi) = \int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t$，即 $f(x) = f(\xi) + \int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t$，

所以 $|f(x)| \leqslant |f(\xi)| + \left|\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant |f(\xi)| + \left|\int_\xi^x |f'(t)|\mathrm{d}t\right|$

$$\leqslant |f(\xi)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t,$$

故 $|f(x)| \leqslant \int_0^1 (|f(t)| + |f'(t)|)\mathrm{d}t.$

【例 4.37】 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，试证：

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

【证】 由积分中值定理有 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)$，$a \leqslant \xi \leqslant b$.

又 $|f(x)| - |f(\xi)| \leqslant |f(x) - f(\xi)| = \left|\int_\xi^x f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$，

故 $|f(x)| \leqslant |f(\xi)| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x$，

于是 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)| \leqslant \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$

【例 4.38】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $|f'(x)| < M$，试证：

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

【证】 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x$，$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum\limits_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x$，

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}x,$$

又因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理，

所以 $f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) = f'(\xi)\left(\frac{k}{n} - x\right)$，$x < \xi < \frac{k}{n}$，又 $|f'(x)| \leqslant M$，

于是，有 $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M\left(\frac{k}{n} - x\right)\mathrm{d}x$

$$= -M\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \Bigg|_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}$$

$$= \frac{M}{2}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{M}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot n = \frac{M}{2n}.$$

C. 利用泰勒公式证明(适用于：被积函数二阶或二阶以上可导，且又知最高阶导数的符号或界的命题证法)

证明程序：直接写出 $f(x)$ 在指定点处的泰勒展开式(注意：证明定积分等式时先作辅助函

数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,然后在指定点处展成泰勒公式),然后根据题意对泰勒余项进行放缩.

【例 4.39】 设 $f(x)\geqslant 0,f''(x)\leqslant 0$,对 $\forall x\in[a,b]$ 成立,试证:

$$f(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 将 $f(x)$ 在 $t\in[a,b]$ 处展成一阶泰勒公式

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-t)^2,\quad \xi\text{ 在 }x\text{ 与 }t\text{ 之间}.$$

因为　$f''(x)\leqslant 0$,　所以 $f''(\xi)\leqslant 0$,于是,有

$$f(x)\leqslant f(t)+f'(t)(x-t),$$

两边在 $[a,b]$ 上对 t 积分,得

$$(b-a)f(x)\leqslant\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+\int_a^b f'(t)\cdot(x-t)\mathrm{d}t,$$

即　$$(b-a)f(x)\leqslant\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+(x-t)f(t)\Big|_a^b+\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+(x-b)f(b)-(x-a)f(a)$$

$$\Rightarrow\quad 2\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\geqslant(b-a)f(x)+(b-x)f(b)+(x-a)f(a),$$

由于　$f(x)\geqslant 0,f(a)\geqslant 0,f(b)\geqslant 0,x-a\geqslant 0,b-x\geqslant 0$,

故　$2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant(b-a)f(x)$,　即 $f(x)\leqslant\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

题型 X　定积分的杂例

【例 4.40】 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$,试证:$\mathrm{e}^x\mid f(x)\mid\leqslant 2$.

【证】 因为 $f(x)\xlongequal{u=\mathrm{e}^t}\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\sin u\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}u=-\frac{\cos u}{u}\Big|_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}-\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u$

$$=\frac{\cos\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\frac{\cos\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x+1}}-\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u,$$

所以 $$|f(x)|=\left|\frac{\cos\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}-\frac{\cos\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x+1}}-\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u\right|\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}+\int_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}-\frac{1}{u}\Big|_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{x+1}}=\frac{2}{\mathrm{e}^x},$$

故 $\mathrm{e}^x\mid f(x)\mid\leqslant 2$.

【例 4.41】 设函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{a},a\right]$ 上非负可积 $(a>0)$,且 $\int_{-\frac{1}{a}}^a xf(x)\mathrm{d}x=0$,试证:

$$\int_{-\frac{1}{a}}^a x^2f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\frac{1}{a}}^a f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 令 $F(x)=\left(x+\frac{1}{a}\right)(a-x)f(x)$,　因为 $f(x)\geqslant 0$,　$x\in\left[-\frac{1}{a},a\right]$.

所以 $F(x)\geqslant 0$ $$\Rightarrow\quad\int_{-\frac{1}{a}}^a F(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{a}}^a\left(x+\frac{1}{a}\right)(a-x)f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$$

$$\Rightarrow\quad\int_{-\frac{1}{a}}^a f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{a}}^a x^2f(x)\mathrm{d}x+\left(a-\frac{1}{a}\right)\int_{-\frac{1}{a}}^a xf(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

又 $\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\mathrm{d}x = 0$,

故 $\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

注 本题这种以观察法作辅助函数 $F(x)$ 的方法也是常遇到的,请读者随时注意积累经验.

【例 4.42】 设在$[1,+\infty)$上,$0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$,证明:极限$\lim\limits_{x\to+\infty} f(n)$存在.

【证】 由 $f'(x) > 0$,可知在$[1,+\infty)$上 $f(x)$"↑",以下证 $f(x)$ 有界.

因为 $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$,所以 $0 < \int_1^x f'(x)\mathrm{d}x < \int_1^x \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\ 0 < f(x) - f(1) < 1 - \frac{1}{x}\ \Rightarrow\ f(1) < f(x) < 1 - \frac{1}{x} + f(1) < 1 + f(1)$,

故 $f(x)$ 有界,由于 $f(x)$ 单调有界,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ 存在.

题型 Ⅺ　广义积分的计算

【解题提示】 在计算广义积分时,一般是把其转化为定积分,然后求极限.其计算程序是:① 区别类型(无穷积分,瑕积分),对既有无穷积分又有瑕积分的混合型,一定要先进行分解,使各单个积分为只有一个瑕点的瑕积分,一个积分限为无穷的无穷积分;② 求出被积函数的原函数;③ 按定义求出各广义积分的值;④ 求出 ③ 中所得各值的代数和.

【例 4.43】 求下列广义积分:

(1)$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$;　(2)$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{\sin x}}$;

(3)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}(\alpha < 1)$;　(4)$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

【解】 (1) 令 $x - 1 = \sec\theta$, 则 $\mathrm{d}x = \sec\theta\tan\theta\mathrm{d}\theta$,于是

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^4\theta\tan\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\mathrm{d}(\sin\theta) = \sin\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

(2) 由分部积分公式,有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{\sin x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{\sin x})}{\cos^2 x} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{\sin x}}{1-\sin^2 x}$$

$$= \int\left[\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x}\right]\mathrm{d}(\sqrt{\sin x})$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}\right| + \arctan\sqrt{\sin x} + C,$$

于是　原式$= \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}\right| + \arctan\sqrt{\sin x}\right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{6}}$

$$= \ln(1+\sqrt{2}) + \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

注 对于积分区间有限的积分，首先要判别是定积分还是被积函数为有无穷间断点的广义积分. 如果是广义积分，而按定积分来计算是错误的，即便是按定积分求得的结果与按广义积分求得的结果相同，前者的概念也是错误的，因为当被积函数在$[a,b]$上连续（也可以有有限个第二类间断点）时，才能使用牛顿－莱布尼兹公式或分部积分公式.

(3) 令$I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$，则有

$$I'(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\alpha\cos x}+\frac{1}{1-\alpha\cos x}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2dx}{1-\alpha^2\cos^2x}.$$

设$u=\cot x$，则有$\cos x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$，$dx=-\frac{du}{1+u^2}$，

于是 $$I'(\alpha)=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(1-\alpha^2)u^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\sqrt{1-\alpha^2}\,u\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\Rightarrow\quad I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}}dt=\pi\arcsin\alpha.$$

(4) 因为$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=\infty$， 所以$x=1$为$f(x)$的瑕点，

$$原式=\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\int_{1+\varepsilon}^2\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2^2-\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}}\right]=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^2$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\arcsin\frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}-\arcsin\frac{3}{4}\right]=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{3}{4}.$$

【例 4.44】 求下列广义积分：

(1) 已知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$，计算$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3(e^{\frac{\pi}{x}}-1)}dx$；

(2) 已知$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，计算$\int_{-1}^{+\infty}xe^{-x^2-2x}dx$；

(3) 设$f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}e^{-t^2}dt$，求$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$；

(4) 已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx$；

(5) 求积分$\int_0^{+\infty}\min\left\{e^{-x},\frac{1}{2}\right\}dx$.

【解】 (1) 令$y=\frac{\pi}{x}$，则$x=\frac{\pi}{y}$，$dx=-\frac{\pi}{y^2}dy$，于是有

$$原广义积分\quad I=\int_{+\infty}^0\frac{1}{\left(\frac{\pi}{y}\right)^3(e^y-1)}\left(-\frac{\pi}{y^2}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{y}{e^y-1}dy=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{ye^{-y}}{1-e^{-y}}dy.$$

因为当 $y>0$ 时，$e^{-y}=\frac{1}{e^y}<1$，$\frac{1}{1-e^{-y}}=\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-y})^k=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ky}$，

所以 $I=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\left(ye^{-y}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}e^{-ky}\right)dy=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}ye^{-ky}dy$

$$=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{ye^{-ky}}{k}-\frac{e^{-ky}}{k^2}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{6}.$$

(2) $\int_{-1}^{+\infty}xe^{-x^2-2x}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+\infty}e\cdot e^{-(x+1)^2}d(x+1)^2-e\int_{-1}^{+\infty}e^{-(x+1)^2}d(x+1)$

$$\xlongequal{令 t=x+1}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e\cdot e^{-t^2}dt^2-e\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}e-e\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{e}{2}(1-\sqrt{\pi}).$$

(3) 显然 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$ 是一个瑕积分，用分部积分法解.

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 f(x)d(2\sqrt{x})=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)dx$$

$$=0-2\int_0^1\sqrt{x}\left(e^{-x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=-\int_0^1 e^{-x}dx=e^{-x}\Big|_0^1=e^{-1}-1.$$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\sin^2xd\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{a\to+\infty\\ \delta\to0^+}}\int_\delta^a\sin^2xd\left(-\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{\substack{a\to+\infty\\ \delta\to0^+}}\left[-\frac{\sin^2x}{x}\right]_\delta^a+\lim_{\substack{a\to+\infty\\ \delta\to0^+}}\int_\delta^a\frac{1}{x}2\sin x\cos xdx$$

$$=0+\lim_{\substack{a\to+\infty\\ \delta\to0^+}}\int_\delta^a\frac{\sin2x}{2x}d(2x)\xlongequal{令 t=2x}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

(5) 由于在 $[0,+\infty)$ 上，函数 e^{-x}“↘”，故当 $x\in[0,\ln2]$，有 $e^{-x}\geqslant\frac{1}{2}$，

于是 $\min\left\{e^{-x},\frac{1}{2}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\in[0,\ln2]\\ e^{-x} & x\in(\ln2,+\infty)\end{cases}$，

$$\int_0^{+\infty}\min\left\{e^{-x},\frac{1}{2}\right\}dx=\int_0^{\ln2}\frac{1}{2}dx+\int_{\ln2}^{+\infty}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\ln2-\lim_{a\to+\infty}e^{-x}\Big|_{\ln2}^{a}=\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}.$$

题型Ⅻ　判别广义积分的敛散性

【解题提示】判别广义积分的敛散性有两种方法：

方法 1°　直接法，即由敛散性的定义判别；

方法 2°　间接法，即由判别准则判别. 在利用准则判别广义积分的敛散性时，首先，考察是否有无穷端点. 如果有无穷端点，则判断无穷端点的广义积分是否收敛. 其次，考察有限区间的无界函数是否有无穷间断点. 如果有无穷间断点，则判断此无穷间断点形成的广义积分是收敛还是发散.

对于无穷限的广义积分，其判敛法为：

1°　比较法：设 $f(x)$，$g(x)$ 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数，且 $f(x)\leqslant g(x)$，

如果$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛;

如果$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散,则$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散.

特别地,取$g(x)=\dfrac{M}{x^p}(M>0)$:

如果$f(x)\leqslant\dfrac{M}{x^p}, p>1$,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛$(a>0)$;

如果$f(x)\geqslant\dfrac{M}{x^p}, p\leqslant 1$,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散$(a>0)$.

2° 比较判别法的极限形式:设函数$f(x)$及$g(x)$都是区间$[a,+\infty)$上的非负连续函数,若$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$,则　当$0<l<+\infty$时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同时收敛或发散;

当$l=0$时,若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛;

当$l=+\infty$时,若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也发散.

特别地,若$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=l, 0\leqslant l<+\infty$,则

当$p>1$时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛$(a>0)$;

当$0<p\leqslant 1$时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散$(a>0)$.

对于无界函数的广义积分(瑕积分),其判敛法为:

1° 比较法:设$f(x)$及$g(x)$都是$(a,b]$上非负连续函数,且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty$,$f(x)\leqslant g(x)$,$(a<x\leqslant b)$,则

若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛;

若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散,则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$也发散;

特别地,取$g(x)=\dfrac{M}{(x-a)^p}(M>0)$,

若$f(x)\leqslant\dfrac{M}{(x-a)^p}, 0<p<1$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

若$f(x)\geqslant\dfrac{M}{(x-a)^p}, p\geqslant 1$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

2° 比较法的极限形式:设$f(x)$及$g(x)$都是$(a,b]$上的非负连续函数,$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$,则当$0<l<+\infty$时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同时收敛或发散.

特别地,取$g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^p}$,若$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=l, 0<l<+\infty$,则

当$p<1$时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛;

当$p\geqslant 1$时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散.

注　判别$[a,b)$上广义积分的敛散性，只需将$(x-a)$换成$(b-x)$即可.

对于广义积分的绝对收敛、条件收敛，其判敛法为：

当被积函数$f(x)$在积分区间内不定号（有正有负）时，此时广义积分的判敛，应先判别其是否绝对收敛（对$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$或$\int_a^b|f(x)|dx$应用比较法，极限判定法），若$|f(x)|$的广义积分发散，则$f(x)$的广义积分可能收敛也可能发散，这时可据广义积分敛散的定义来判别.

【例 4.45】　判别下列各广义积分的敛散性：

(1)$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x\sqrt{x}}$；　(2)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$；

(3)$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$；　(4)$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}(p>q>0)$.

【解】(1)由题设可知$x=0$是被积函数的无穷型间断点.

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{1}{e^x\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x\sqrt{x}}dx, \quad ①$$

对于①式右端第一项来说，它是一个被积函数在$x=0$处有无穷间断点的广义积分.

由于$\lim\limits_{x\to0^+}\left[x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{e^x\sqrt{x}}\right]=1$，故由无界函数积分的收敛准则，知$\int_0^1\frac{1}{e^x\sqrt{x}}dx$收敛.

对于①式右端第2项来说，它是无穷积分，由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{e^x\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$，

故由无穷积分的收敛准则，知$\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x\sqrt{x}}dx$收敛.

综上所述，$\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x\sqrt{x}}$收敛.

注　对于所给广义积分，一方面要分清是无穷积分还是无界函数积分，一方面还要注意，当积分区间为无穷区间时，被积函数是否还有无穷间断点.

(2)因为　$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}=1$，　$p=\frac{1}{2},l=1$.

由广义积分的判别法知　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$收敛.

(3)$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$，

因为　$\lim\limits_{x\to0^+}x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}=0$，　故　$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$　收敛；

$\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}=0$，　故　$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln x}{1-x^2}$　收敛；

所以　原积分$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$　收敛.

(4)由于$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x^p+x^q}\Big/\frac{1}{x^q}=1$，

所以　$\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$与$\int_0^1\frac{dx}{x^q}$同敛散，则当$q<1$时，$\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$收敛.

又　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\Big/\frac{1}{x^q}=1$，

所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 同敛散，则当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 收敛，

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$ 在 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛.

【例 4.46】 判别各广义积分的敛散性

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln|x-1|}{x-1}\mathrm{d}x$；　(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\cos x|}$.

【解】 (1) 由于当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，则 $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 同敛散，

而 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 收敛，那么 $\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛.

又 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^3}}$，而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 收敛，

故　原广义积分收敛.

注　对于被积函数可变号的广义积分，一般先考虑其绝对值的广义积分.

(2) 因为 $x\to 1$ 时，$\frac{\ln|x-1|}{x-1}\to\infty$，即 $x=1$ 为无穷间断点，

所以原式 $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{e}}^{1-\varepsilon}\frac{\ln(1-x)}{x-1}\mathrm{d}x+\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{\ln(x-1)}{x-1}\mathrm{d}x$，

而 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{e}}^{1-\varepsilon}\frac{\ln(1-x)}{x-1}\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{e}}^{1-\varepsilon}\ln(1-x)\mathrm{d}\ln(1-x)$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln^2(1-x)\right]_{\frac{1}{e}}^{1-\varepsilon}=+\infty,$$

故　原广义积分发散.

(3) 由于 $\frac{1}{1+x|\cos x|}\geqslant\frac{1}{1+x}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x|\cos x|}$ 发散.

【例 4.47】 设 $f(x)$ 于 $(0,1]$ 上是单调的，且在点 $x=0$ 的邻域内无界，证明：若 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【证】 不妨设 $f(x)$ 单调下降，则当 $k=1,2,\cdots,n$ 时，有

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x,\quad\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

于是有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\tag{⊛}$$

因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，　所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，

⊛ 式取 $n\to\infty$ 时的极限，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

第五章　中值定理

题型Ⅰ　有关闭区间上连续函数的命题的证明

【解题提示】 证明的方法：(1) 直接法. 先用最值定理，再用介值定理. (2) 间接法. 先作辅助函数 $F(x)$，验证 $F(x)$ 满足零值定理，再由零值定理得出命题的证明.

辅助函数 $F(x)$ 的做法如下：

① 将欲证结论中的 ξ(或 x_0) 改写成 x；

② 移项，使等式一端为零，则另一边即为所作的辅助函数 $F(x)$.

【例 5.1】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且均为严格单增的正函数，证明：在 (a,b) 内 ∃ 一个 ξ，使得 $f(b)g(a)+f(a)g(b)=2f(\xi)g(\xi)$.

【证】 令 $F(x)=f(b)g(a)+f(a)g(b)-2f(x)g(x)$，

显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

因为
$$F(a)=f(b)g(a)+f(a)g(b)-2f(a)g(a)=[f(b)-f(a)]g(a)+[g(b)-g(a)]f(a)>0,$$
$$F(b)=f(b)g(a)+f(a)g(b)-2f(b)g(b)=f(b)[g(a)-g(b)]+g(b)[f(a)-f(b)]<0,$$

可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足零值定理，于是 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0$ 即
$$f(b)g(a)+f(a)g(b)=2f(\xi)g(\xi).$$

【例 5.2】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，证明 ∃ 一个 $\xi\in(a,b)$，使得
$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$$F(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<0(\text{因为 } f(x)>0),$$
$$F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_b^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0(\text{因为 } f(x)>0),$$

可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足零值定理，于是 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0$，

即
$$\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x-\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

因为由已证结果知
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=2\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=2\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x,$$

所以 $\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x=\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

【例 5.3】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_i\in[a,b]$，$t_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum_{i=1}^n t_i=1$. 证明

至少 ∃ 一个 $\xi \in [a,b]$，使

$$f(\xi) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n).$$

【证】 因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，

所以 $\exists M, m$ 使 $M = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant b} f(x), m = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$，

于是对任何 $x \in [a,b]$，均有 $M \leqslant f(x) \leqslant M$，

因此，当 $x_i \in [a,b], t_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$m = \sum_{i=1}^{n} m t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M t_i = M,$$

由介值定理，∃ 一个 $\xi \in [a,b]$ 使

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i).$$

【例 5.4】 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$，证明：∃ 一个 $\xi \in (-\infty, +\infty)$，使 $f(\xi) + \xi = 0$.

【证】 令 $F(x) = f(x) + x$.

显然，$F(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$内连续，

由题设有 $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[1 + \dfrac{f(x)}{x}\right] = +\infty$，

所以 $\exists X_1 > 0$，使 $F(X_1) > 0$；

同理，由于 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left[1 + \dfrac{f(x)}{x}\right] = -\infty$，

$\exists X_2 < 0$，使 $F(X_2) < 0$；

可知 $F(x)$ 在$[X_2, X_1]$上满足零值定理，于是

$\exists \xi \in (X_2, X_1) \subset (-\infty, +\infty)$，使 $F(\xi) = 0$ 即 $f(\xi) + \xi = 0$.

题型 Ⅱ 欲证结论为 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题的证法

【解题提示】 证法有三：① 验证 ξ 为 $f^{(n-1)}(x)$ 的最值或极值点，然后用费尔马定理即可得出证明. ② 验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在$[a,b]$上满足洛尔定理，由定理即得命题证明. ③ 用泰勒公式或多次利用洛尔定理的结论.

【例 5.5】 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，且 $f'_+(a) \cdot f'_-(b) < 0$，则在$(a,b)$内 ∃ 一个 ξ，使得 $f'(\xi) = 0$.

【证】 不妨设 $f'_+(a) < 0$，则 $f'_-(b) > 0$，

因为 $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$，

所以由极限的保号定理，可知 $\exists \delta_1 > 0$，当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时，有

$$\frac{f(x) - f(a)}{x + b} < 0 \Rightarrow f(x) < f(a), \qquad ①$$

同理，$\exists \delta_2 > 0$，当 $x \in (b - \delta_2, b)$ 时，有

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0 \Rightarrow f(x) < f(b). \qquad ②$$

又因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，所以 $f(x)$ 在$[a,b]$上必有最小值，由 ①，② 可知最小

值点必在(a,b)内取得，设$\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，由费尔马定理有$f'(\xi)=0$.

【例 5.6】 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，又$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x$，证明：$\exists$一个$\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=0$.

【证】 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{由积分}}2\left(\frac{1}{2}-0\right)f(\eta)=f(\eta),0\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{2}$,

由题设可知$f(x)$在$[\eta,1]$上连续，在$(\eta,1)$内可导，又$f(1)=f(\eta)$(已证)，洛尔定理条件满足，于是$\exists$一个$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$使得$f'(\xi)=0$.

注 在题设中有定积分出现，一般应将其按积分中值定理先处理.

【例 5.7】 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，a,b为任意实数，证明：若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则$f(x)\equiv0$.

【证】 可按上题的方法处理，过程略.

【另证】 令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,

因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且对任意实数a,x，恒有$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=0$,

所以 $F(x)\equiv0,x\in(-\infty,+\infty)$，0可看作$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的最大值(或最小值). 由费尔马定理有 $F'(x)\equiv0$,

又 因为$F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)\equiv0$.

【例 5.8】 设$f(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，且$f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(2)$，证明：$\exists$一个$\xi\in(0,2)$使$f''(\xi)=0$.

【证】 显然$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上满足洛尔定理，于是$\exists\eta_1$使

$$f'(\eta_1)=0,\quad \eta_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right). \qquad ①$$

又由积分中值定理，有 $f(2)=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(\eta_2),\frac{1}{2}\leqslant\eta_2\leqslant1$,

于是，$f(x)$在$[\eta_2,2]$上满足洛尔定理，$\exists$一个η_3，使

$$f'(\eta_3)=0,\quad \eta_3\in(\eta_2,2)\subset\left(\frac{1}{2},2\right), \qquad ②$$

由①，②得 $f'(\eta_1)=f'(\eta_3)$,

再对$f'(x)$在$[\eta_1,\eta_3]$上使用洛尔定理，于是，有

$$f''(\xi)=0,\xi\in(\eta_1,\eta_3)\subset(0,2).$$

题型 Ⅲ 欲证结论为$f^{(n)}(\xi)=k(k\neq0)$，或由$a,b,f(a),f(b),\xi,f(\xi)$，$f'(\xi),\cdots,f^{(n)}(\xi)$所构成的代数式的证法

【解题提示】 证明程序：(1)作辅助函数$F(x)$；(2)验证$F(x)$满足洛尔定理条件. 由此即得出命题证明.

辅助函数 $F(x)$ 的做法.

(一) 原函数(或微分方程) 法. 其步骤如下:

(1) 将欲证结论中的 ξ 换成 x;

(2) 通过恒等变形将结论化为易消除导数符号(或称为易积分) 的形式;

(3) 用观察法或积分法求出原函数(仅消掉一次导数),为简便起见,积分常数取作"0";

(4) 移项,使等式一边为"0",则另一边即为所求作的辅助函数 $F(x)$.

(二) 常数 k 值法. (适用于:常数部分可分离出的命题) 构造辅助函数 $F(x)$ 的步骤如下:

(1) 将常数部分令作 k;

(2) 作恒等变形,使等式一端为 a 及 $f(a)$ 构成的代数式,另一端为 b 及 $f(b)$ 构成的代数式;

(3) 分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换对称式. 若是,只要将端点 a(或 b) 改成 x,相应的函数值 $f(a)$(或 $f(b)$) 改成 $f(x)$,则端点关于 x,$f(x)$ 的表达式即为所求作的辅助函数 $F(x)$.

【例 5.9】 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b) 内可导,其中 $a>0$ 且 $f(a)=0$. 证明:在(a,b) 内 $\exists$ 一个 ξ,使 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

【分析】 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)\xrightarrow{令\ \xi=x}f(x)=\dfrac{b-x}{a}f'(x)$

$$\Rightarrow\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{a}{b-x}\xrightarrow{积分}\ln f(x)=-a\ln(b-x)+\ln C$$

$$\Rightarrow\quad (b-x)^a f(x)=C,$$

令 $F(x)=(b-x)^a f(x)$.

【证】 作辅助函数 $F(x)=(b-x)^a f(x)$,

由题设 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b) 内可导,又

$F(a)=(b-a)^a f(a)=0$(因为 $f(a)=0$),

$F(b)=(b-a)^a f(b)=0$,

可见 $F(x)$ 在$[a,b]$上满足洛尔定理. 于是,$\exists\,\xi\in(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$,即

$$-a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)+(b-\xi)^a f'(\xi)=0,$$

故 $\qquad f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$.

【例 5.10】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)\neq 0$,证明对一切自然数 n,在$(0,1)$ 内 $\exists$ 一个 ξ,使 $\dfrac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

【分析】 $\dfrac{nf'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}\xrightarrow{令\ \xi=x}\dfrac{nf'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(1-x)}{f(1-x)}$

$$\Rightarrow\quad n\ln f(x)=-\ln f(1-x)+\ln c\quad\Rightarrow\quad f^n(x)f(1-x)=C,$$

令 辅助函数 $F(x)=f^n(x)f(1-x)$.

【证】 略.

【例 5.11】 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,且 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,证明:$\exists$ 一个 $\xi\in(0,1)$,使 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$.

【分析】 若令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则不易验证 $F(0)F(1)<0$. 故改令

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \quad F(x)=\int_0^x\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big|_0^x-\int_0^x xf(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t.$$

【证】 令 $F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，

显然，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又 $F(0)=0$，

$F(1)=\int_0^1(1-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=0$，

$\left(\text{因为}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)$

可知洛尔定理条件满足，于是 $\exists$ 一个 $\xi\in(0,1)$，使

$F'(\xi)=0$，即 $\left(\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t\right)'_{x=\xi}=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)\right]_{x=\xi}=0$，

故 $\int_0^\xi f(x)\mathrm{d}x=0$.

【例 5.12】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b),g(a)=g(b)$，证明：$\exists$ 一个 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f''(\xi) & g''(\xi) \\ f(\xi)-f(a) & g(b)-g(\xi)\end{vmatrix}=2f'(\xi)g'(\xi).$$

【分析】 本题结论 $\Leftrightarrow f''(\xi)g(b)-f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)+f(a)g''(\xi)=2f'(\xi)g''(\xi)$

$\xrightarrow{\text{令}\ \xi=x} f''(x)g(b)+g''(x)f(a)=[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]'$

$\xrightarrow{\text{积分}} g(b)f'(x)+f(a)g'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)+C$，

令 $F(x)=g(b)f'(x)+f(a)g'(x)-f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$.

【证】 令 $F(x)=g(b)f'(x)+f(a)g'(x)-f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$，

显然，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

又 $F(a)=f'(a)g(b)+f(a)g'(a)-f'(a)g(a)-f(a)g'(a)$

$\qquad=f'(a)[g(b)-g(a)]=0$，

$F(b)=f'(b)g(b)+f(a)g'(b)-f'(b)g(b)-f(b)g'(b)$

$\qquad=[f(a)-f(b)]g'(b)=0$，

可知 $F(x)$ 满足洛尔定理，于是 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$，

即 $\quad f''(\xi)g(b)+f(a)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)-f(\xi)g''(\xi)-2f'(\xi)g'(\xi)=0$，

故 $\begin{vmatrix} f''(\xi) & g''(\xi) \\ f(\xi)-f(a) & g(b)-g(\xi)\end{vmatrix}=2f'(\xi)g'(\xi)$.

【例 5.13】 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)$，使

$$f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

【分析】 令 $\xi=x$，则结论 $\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Rightarrow f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}+C$.

【证】 令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$,

显然 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,在 $(0,+\infty)$ 内可导.

又由 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$, 可知 $f(0)=0$,

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$, 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,

所以 $F(0)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}\right]=0$,

可知 $F(x)$ 满足洛尔定理,于是 $\exists\xi\in(0,+\infty)$,使得

$$F'(\xi)=0,\quad 即\quad f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

【例 5.14】 设 $b>a>0$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,证明:$\exists$ 一个 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}$.

【分析】 令 $\dfrac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=k\ \Rightarrow\ af(b)-bf(a)=kab(b-a)$

$$\Rightarrow af(b)-kab^2=bf(a)-ka^2b\ \Rightarrow\ \frac{f(b)-kb^2}{b}=\frac{f(a)-ka^2}{a},$$

令 $F(x)=\dfrac{f(x)-kx^2}{x}=\dfrac{f(x)}{x}-kx$.

【证】 作辅助函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}-kx$.

由题设条件可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导.

又 $F(b)-F(a)=\left(\dfrac{f(b)}{b}-kb\right)-\left(\dfrac{f(a)}{a}-ka\right)=\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}-(b-a)k$

$$=\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}-\frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}(b-a)=0,$$

可见 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足洛尔定理,于是 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=0,\quad 即\quad \frac{af(b)-bf(a)}{ab(b-a)}=\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}.$$

题型Ⅳ 欲证结论为 (a,b) 内 $\exists\xi,\eta$ 满足某种关系式的命题的证法

【解题提示】 这类命题的证法:或是用两次拉氏定理,或是一次拉氏定理、一次柯西定理,或是两次柯西中值定理.然后再将所得结果作某种运算.

证明中的辅助函数 $F(x)$ 的做法比较简单,仅将欲证结论中的 ξ 或 η 看作变量,作某种简单的恒等变形即可看出.

【例 5.15】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=1$,试证 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

【分析】 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1\Leftrightarrow e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$,

将 η 看作变量,则可写成 $[e^{\eta}f(\eta)]'=e^{\xi}$,可知辅助函数为 $F(x)=e^xf(x)$.

【证】 令 $F(x)=e^xf(x)$,由题设条件可知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏定理,于是 $\exists\eta\in(a,b)$,使 $\dfrac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$, ①

因为 $f(a)=f(b)=1$,

所以 上式变为$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]$,

令 $\varphi(x)=e^x$,则$\varphi(x)$在$[a,b]$上满足拉氏定理,于是$\exists\xi\in(a,b)$,使

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi, \qquad ②$$

由①,②即得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

【例5.16】 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$f'(x)\neq 0$,试证:$\exists\xi,\eta\in(a,b)$,使得$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

【分析】 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{e^b-e^a}{b-a}\frac{f'(\eta)}{e^\eta}$,将$\eta$看作变量,则上式可写成$f'(\xi)=\frac{e^b-e^a}{b-a}\frac{f'(\eta)}{(e^\eta)'}$,可知可设辅助函数为$g(x)=e^x$.

【证】 令$g(x)=e^x$,由题设条件可知$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理,于是$\exists\eta\in(a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}\frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \qquad ①$$

又$f(x)$在$[a,b]$上满足拉氏中值定理,于是$\exists\xi\in(a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \qquad ②$$

由①,②及题设 $f'(x)\neq 0, x\in(a,b)$,

即得 $$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}.$$

【例5.17】 设函数$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上连续,且$g(b)=g(a)=1$,在(a,b)内$f(x)$,$g(x)$可导,且$g(x)+g'(x)\neq 0$,$f'(x)\neq 0$.证明:$\exists\xi,\eta\in(a,b)$,使

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^\xi[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^\eta}.$$

【分析】 原结论 $\Leftrightarrow$ $$\frac{f'(\xi)}{e^\xi[g(\xi)+g'(\xi)]}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta},$$

将η和ξ均看作变量,则上式可写成

$$\frac{f'(\xi)}{[e^\xi g(\xi)]'}=\frac{f'(\eta)}{(e^\eta)'},$$

辅助函数可令$\varphi(x)=e^xg(x)$,$\psi(x)=e^x$.

【证】 令$\varphi(x)=e^xg(x)$,则由题设可知$f(x)$,$\varphi(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理,于是$\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^bg(b)-e^ag(a)}=\frac{f'(\xi)}{e^\xi[g(\xi)+g'(\xi)]}$$

$$\xrightarrow{\text{因为 } g(a)=g(b)=1}\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\xi)}{e^\xi[g(\xi)+g'(\xi)]}, \qquad ①$$

又令$\psi(x)=e^x$,则$f(x)$,$\psi(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理,于是$\exists\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}, \qquad ②$$

由①,②可得

$$\frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\frac{f'(\xi)}{e^\xi[g(\xi)+g'(\xi)]}\Rightarrow\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^\xi[g(\xi)+g'(\xi)]}{e^\eta}.$$

第六章　一元微积分的应用

§1　导数的应用

题型Ⅰ　利用导数判别函数单调增减性的方法证明不等式

该法适用于某区间成立的不等式.数字不等式通常是通过做辅助函数来完成.

证明程序:① 移项(有时需要作简单的恒等变形),使不等式一端为“0”,另一端即为所求作的辅助函数 $f(x)$;② 求 $f'(x)$,并验证 $f(x)$ 在指定区间的增减性(有时需求 $f''(x)$,$f'''(x)$ 才能判别 $f(x)$ 在指定区间的增减性);③ 求出区间端点的函数值(或极限值),作比较即得所证.

【例 6.1】　证明:当 $x \geqslant 0$ 时,$(x^2-1)\ln x \geqslant (x-1)^2$.

【证】　令 $f(x) = (x^2-1)\ln x - (x-1)^2$,　$f(1) = 0$,

$$f'(x) = 2x\ln x - x - \frac{1}{x} + 2,\quad f'(1) = 0,$$

$$f''(x) = 2\ln x + \frac{1}{x^2} + 1,\qquad f''(1) = 2 > 0,$$

$$f'''(x) = \frac{2(x^2-1)}{x^3}.$$

当 $0 < x < 1$ 时,$f'''(x) < 0$,　$f''(x)$“↘”,　$f''(x) > f''(1) = 2 > 0$

$\Rightarrow$　$f'(x)$“↗”,　$f'(x) < f'(1) = 0$,　$f(x)$“↘”

$\Rightarrow$　$f(x) > f(1) = 0$　$\Rightarrow$　$(x^2-1)\ln x > (x-1)^2$;

当 $1 < x < +\infty$ 时,$f'''(x) > 0$,　$f''(x)$“↗”,　$f''(x) > f''(1) = 2 > 0$

$\Rightarrow$　$f'(x)$“↗”,　$f'(x) > f'(1) = 0$,　$f(x)$“↗”

$\Rightarrow$　$f(x) > f(1) = 0$　$\Rightarrow$　$(x^2-1)\ln x > (x-1)^2$;

当 $x = 1$ 时,$(x^2-1)\ln x = (x-1)^2$.

综上所述,当 $x > 0$ 时　$(x^2-1)\ln x \geqslant (x-1)^2$.

【例 6.2】　证明:当 $0 < x < 1$ 时,$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} < \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

【分析】　若令 $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x} - \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,$f'(x)$ 的导数很复杂,因此先作简单变形

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}\arcsin x < (1+x)\ln(1+x).$$

【证】　令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x$,　$f(0) = 0$.

因为　$f'(x) = \ln(1+x) + 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - 1$

$$= \ln(1+x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x > 0,$$

所以 $f(x)$“↗”，　故当 $0<x<1$ 时，　$f(x)>f(0)=0$，

即　$(1+x)\ln(1+x)-\sqrt{1-x^2}\arcsin x>0$，

亦即　$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

【例 6.3】　设 $b>a>0$，证明：$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

【分析】　$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}\quad\Leftrightarrow\quad(a+b)[\ln b-\ln a]>2(b-a)$

$$\Leftrightarrow\quad(a+b)(\ln b-\ln a)-2(b-a)>0.$$

【证】　令 $f(x)=(a+x)(\ln x-\ln a)+2(x-a)$，$f(a)=0$.

$$f'(x)=(\ln x-\ln a)+(a+x)\frac{1}{x}-2=\ln x-\ln a+\frac{a}{x}-1,$$

$$f'(a)=0,$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}>0,(\text{当 } x>a \text{ 时})$$

$\Rightarrow$　$f'(x)$“↗”，$f'(x)>f'(a)=0$.　所以　$f(x)$“↗”，于是

当 $x>a$ 时，$f(x)>f(a)=0$，令 $x=b$，则

$f(b)>f(a)=0$，即 $(a+b)(\ln b-\ln a)-2(b-a)>0$，

亦即　$\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$.

【例 6.4】　证明不等式　$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}(x>0,y>0,\beta>\alpha>0)$.

【分析】　$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\quad\Leftrightarrow\quad x\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}>x\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$

$$\Leftrightarrow\quad\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}>\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

令 $\dfrac{y}{x}=u$. 则原不等式　$\Leftrightarrow$　$(1+u^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(1+u^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$，

即证　$f(\alpha)>f(\beta)$，其中 $f(t)=(1+u^t)^{\frac{1}{t}}$.

【证】　令 $f(t)=(1+u^t)^{\frac{1}{t}}\quad(t>0)$，

因为　$f'(t)=\dfrac{f(t)}{t^2}\dfrac{u^t\ln u^t-(1+u^t)\ln(1+u^t)}{1+u^t}<0$，

所以　$f(t)$“↘”，由 $\beta>\alpha>0$，于是

$f(\alpha)>f(\beta)$，即　$(1+u^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(1+u^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$，

亦即　$\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}>\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}$，故　$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

题型Ⅱ　求函数的极值与最值

【解题提示】 求极值的程序：① 求 $f'(x)$，求出驻点（使 $f'(x)=0$ 的解）和使 $f'(x)$ 不存在的点；② 用取极值的充分条件——定理1或定理2判别第一步所得的点是否为极值点，并判别极值点的类型；③ 求出极值.

最值的求解程序：① 求 $f'(x)$，求出 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点. ② 求出第一步所得各点的函数值及端点函数值. 最大者为最大值，最小者为最小值. 从实际应用题中抽象出的数学模型，若仅有一个驻点，则该点处的函数值就是所要求的最值，而不必进行判别.

【例 6.5】 设函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)+4f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，求函数 $f(x)$ 的极大值与极小值.

【解】 $f(x)+4f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$.

令 $t=-\dfrac{1}{x}$，则原方程 $\Rightarrow f\left(-\dfrac{1}{t}\right)+4f(t)=-t$. 由于函数表示法与用什么字母表示无关的特性，所以方程又可写成：$4f(x)+f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-x$，

解线性方程组 $\begin{cases} f(x)+4f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x} \\ 4f(x)+f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-x \end{cases}$，

得　$f(x)=-\dfrac{1}{15}\left(\dfrac{1}{x}+4x\right)$，$f'(x)=-\dfrac{1}{15}\left(-\dfrac{1}{x^2}+4\right)$，　$f''(x)=-\dfrac{2}{15}\dfrac{1}{x^3}$，

令　$f'(x)=0$　$\Rightarrow$　驻点：$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$，

因为 $f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{16}{15}<0$，　$f''\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{16}{15}>0$，

故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{15}\left(2+4\times\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{4}{15}$ 为 $f(x)$ 的极大值，

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{15}\left(-2+4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)=\dfrac{4}{15}$ 为 $f(x)$ 的极小值.

【例 6.6】 求数列 $\left\{\dfrac{(1+n)^3}{(1-n)^2}\right\}$ 的最小项的项数及该项的数值.

【解题提示】 利用相应的函数求解数列的极值是常用的一种方法，因为函数的极值可借助导数来完成.

【解】 令 $f(x)=\dfrac{(1+x)^3}{(1-x)^2}$　（由数列的分母可知 $x\geqslant 2$），

$f'(x)=\dfrac{(1+x)^2(5-x)}{(1-x)^3}$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=5$，

因为当 $2\leqslant x<5$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x>5$ 时，　$f'(x)>0$，

所以 $x=5$ 为 $f(x)$ 的极小值点，$f(5)=\dfrac{27}{2}$，

故数列$\left\{\dfrac{(1+n)^3}{(1-n)^2}\right\}$的最小项的项数为$n=5$.该项的数值为$\dfrac{27}{2}$.

【例 6.7】* 设$f(x)=(1-x)^3\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n-2x-1$,求$f(x)$的最值.

【解】 令$\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2x^{n-1}\mathrm{d}x)'$

$$=x(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n)'=x[x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}]'=x[x(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x)']'$$

$$=x[x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)']'=x\left[x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'\right]'=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

则　$f(x)=(1-x)^3\varphi(x)-2x-1=x(x+1)-2x-1=x^2-x-1$.

$f'(x)=2x-1$,令$f'(x)=0$,得驻点$x=\dfrac{1}{2}$,

$f''(x)=2$,　$f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=2>0$,

故$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{5}{4}$为$f(x)$的极小值.

【例 6.8】 设对给定的x值,$f(x)=\min\{2x+1,x+2,6-2x\}$,求$f(x)$的最大值.

【解】 分别给出$y=2x+1,y=x+2,y=6-2x$的图形,由图6.1可看出:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leqslant 1\\ x+2, & 1<x\leqslant\dfrac{4}{3}.\\ 6-2x, & x>\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

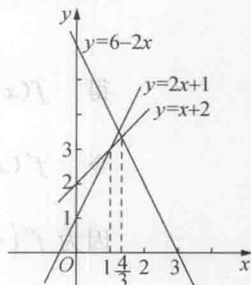


图 6.1

当$x\leqslant 1$时,$f'(x)=2>0$,$\max f(x)=3$,

当$1<x\leqslant\dfrac{4}{3}$时,$f'(x)=1>0$,$\max f(x)=\dfrac{10}{3}$,

当$x>\dfrac{4}{3}$时,$f'(x)=-2<0$,$\max f(x)=\dfrac{10}{3}$,

故$\max\limits_{(-\infty,+\infty)}f(x)=\dfrac{10}{3}$.

【例 6.9】 设$f'(-x)=x[f'(x)-1]$,且$f(0)=0$,求$f(x)$的极值.

【解】 $f'(-x)=x[f'(x)-1]$,令$t=-x$,则原方程变为

$f'(t)=-t[f'(-t)-1]$,即　$xf'(-x)+f'(x)=x$,

解联立方程组$\begin{cases}xf'(x)-f'(-x)=x\\ f'(x)+xf'(-x)=x\end{cases}$,

得　$f'(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}$,积分得$f(x)-f(0)=\displaystyle\int_0^x\frac{x^2+x}{x^2+1}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow$　$f(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+x-\arctan x$,

令　$f'(x)=0$　$\Rightarrow$　$x_1=0,x_2=-1$,

$f''(x)=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$,$f''(0)=1>0$,$f''(-1)=-\dfrac{1}{2}<0$,

故 $f(0)=0$ 为 $f(x)$ 的极小值，$f(-1)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}-1$ 为极大值.

【例 6.10】 设 $y^2=6x$，试从其所有与法线重合的弦中，找出一条最短的弦的长度.

【解题提示】 涉及直线与曲线相交的问题有时用参数方程表示曲线的直角坐标方程比较方便.

【解】 令 $x=ty$，代入 $y^2=6x$，得曲线的参数方程 $\begin{cases}x=6t^2\\y=6t\end{cases}$，

于是 $P(x,y)\to P(6t^2,6t)$. 法线斜率 $k_{法}=-2t$.

设曲线上另一点的坐标为 $Q(6s^2,6s)$. 则 $\overline{PQ}$ 线段的斜率 $k_{PQ}=\frac{6(t-s)}{6(t^2-s^2)}=\frac{1}{t+s}$，

由题设，弦为过 $P(6t^2,6t)$ 点的法线，所以 $\frac{1}{t+s}=-2t\Rightarrow s=-t-\frac{1}{2t}$，

$\overline{PQ}$ 的长度记为 d，则

$d^2=(6s^2-6t^2)^2+(6s-6t)^2=36(s-t)^2[(s+t)^2+1]=\frac{9}{4}\frac{(1+4t^2)^3}{t^4}$，

d^2 的驻点 $\Leftrightarrow l=3\ln(1+4t^2)-4\ln t$ 的驻点，　$l'=\frac{24t}{1+4t^2}-\frac{4}{t}=\frac{8t^2-4}{t(1+4t^2)}$，

令　$l'=0$ 得驻点 $t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$d^2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{9}{4}\times 4\times 27=9\times 27$，

$\Rightarrow$　$d=9\sqrt{3}$，即为所求的最短长度.

【例 6.11】 过抛物线 $y=x^2$ 上一点 $P(a,a^2)$ 作切线，问 a 为何值时所作切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 所围成的图形的面积最小.

【解】 设 RQ 为抛物线 $y=x^2$ 上过 P 点的一条切线，其方程为 $y-a^2=2a(x-a)$，

即　$y=2ax-a^2$.

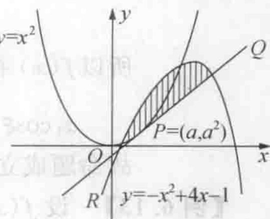


图 6.2

该切线与抛物线 $y=-x^2+4x-1$ 的交点坐标为联立方程组

$\begin{cases}y=-x^2+4x-1\\y=2ax-a^2\end{cases}\Rightarrow x^2+(2a-4)x+(1+a^2)=0$ 的解，

设交点的横坐标为 $x_1,x_2,x_1<x_2$，则

$x_1+x_2=4-2a$，　$x_1x_2=1-a^2$，

$\Rightarrow$　$x_2-x_1=2\sqrt{2a^2-4a+3}$，

于是，所求图形面积为

$$S=\int_{x_1}^{x_2}(-x^2+4x-1-2ax+a^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}(x_1^3-x_2^3)-(a-2)(x_2^2-x_1^2)+(a^2-1)(x_2-x_1)=\frac{4}{3}(2a^2-4a+3)^{\frac{3}{2}}，$$

$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}=8(2a^2-4a+3)^{\frac{1}{2}}(a-1)$，令 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}=0$，得 $a=1$ 唯一驻点，

故当 $a=1$ 时，所围图形的面积有最小值，其为 $S=\frac{4}{3}$.

题型Ⅲ 关于方程根的研究

A. 关于方程 $f(x)=0$ 的根(或 $f(x)$ 的零点)存在性的证明

【解题提示】 证题思路:(1) 验证 $f(x)$ 满足零值定理,从而得出命题的证明.(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点函数值非异号,则令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,验证 $F(x)$ 满足洛尔定理,从而得出 $F'(x)=0$ 有零值,即 $f(x)$ 至少有一个零点的证明.(3) 用反证法.

【例 6.12】 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个实根,并满足:$a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$,

证明:方程 $a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

【分析】 令 $f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$. 因为 $f(0)=a_1+a_2+\cdots+a_n$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,$f(0)$ 与 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 非异号,所以通过零值定理无法证明.

改令 $f'(x)=a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x$,

于是 $f(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$.

【证】 令 $f(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$,

因为 $f(0)=0$,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a_1\sin\frac{\pi}{2}+\frac{a_2}{3}\sin\frac{3}{2}\pi+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$=a_1-\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上满足洛尔定理,于是,$\exists\,\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使 $f'(\xi)=0$,即

$$a_1\cos\xi+a_2\cos 3\xi+\cdots+a_n\cos(2n-1)\xi=0,$$

故命题成立.

【例 6.13】 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 $2T$ 为周期的连续函数,证明:在每个长度为 T 的闭区间上,方程:$f(x)-f(x-T)=0$ 至少有一个实根.

【证】 设 $[x_0,x_0+T]$ 是任一长度为 T 的闭区间.

令 $F(x)=f(x)-f(x-T)$,

则 $F(x_0)=f(x_0)-f(x_0-T)$,

$$F(x_0+T)=f(x_0+T)-f(x_0)\xrightarrow[\text{周期性}]{\text{由于}}f(x_0-T)-f(x_0),$$

(i) 若 $f(x_0)-f(x_0-T)=0$,则 x_0,x_0+T 均是方程在 $[x_0,x_0+T]$ 上的实根.

(ii) 若 $f(x_0)-f(x_0-T)\neq 0$,则 $F(x_0)\cdot F(x_0+T)=-[f(x_0-T)-f(x_0)]^2<0$,于是,由零值定理,$\exists\,x\in(x_0,x_0+T)$,使 $F(x)=0$.

综上所述,命题得证.

【例 6.14】 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且对于 (a,b) 内一切 x,有 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$,证明:方程 $f(x)=0$ 的两个相邻根之间至少有

$g(x)=0$ 的一个实根.

【证】 设 $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$ 是 $f(x)=0$ 的两个相邻的实根. 若 (x_1,x_2) 内没有 $g(x)$ 的实根, 则可以在 $[x_1,x_2]$ 上对函数 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 应用洛尔定理, 于是 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使

$$\varphi'(\xi)=\frac{f'(\xi)g(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{[g(\xi)^2]}=0.$$

与题设矛盾, 命题得证.

B. 关于方程 $f(x)=0$ 的根的唯一性的证明

【解题提示】 证题程序: ① 利用零值定理(或洛尔定理)证明 $f(x)=0$ 至少存在一个实根; ② 利用函数的单调性(或反证法)证明 $f(x)=0$ 最多有一实根.

【例 6.15】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)<1$, 证明: 方程 $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ 在 $(0,1)$ 内只有一个实根.

【证】 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-1$,

显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 又 $F(0)=-1<0$, $F(1)=1-\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t>0$,

由零值定理, $\exists\xi\in(0,1)$, 使 $F(\xi)=2\xi-\int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t-1=0$. 即方程至少有一个实根.

又 $F'(x)=2-f(x)>2-1=1>0$,

故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单增,

即方程 $F(x)=0$ 最多有一个实根.

综上所述, 方程 $2x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=1$ 在 $(0,1)$ 内只有一个实根.

【例 6.16】 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 且 $f(x)>1$, 证明: 方程 $\int_0^x\sqrt{1+t^4}f(t)\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$, 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一的实根.

【证】 令 $F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}f(t)\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,

显然, $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续, 又

$$F(0)=\int_{\cos 0}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<0,$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}f(t)\mathrm{d}t+\int_{\cos\frac{\pi}{2}}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}f(t)\mathrm{d}t>0\text{(因为}\sqrt{1+t^4}f(t)>1\text{)},$$

由零值定理, 可知 $\exists$ 一个 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, 使 $F(\xi)=0$,

因为 $F'(x)=\sqrt{1+x^4}f(x)+\mathrm{e}^{-\cos^2x}\sin x>0$,

所以 $F(x)$ 单增.

于是 $F(x)$ 最多有一个零值.

综上所述,$F(x)$ 有且仅有一个零值,即方程在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一的实根.

【例 6.17】 设在$[1,+\infty]$上处处有 $f''(x)\leqslant 0$,且 $f(1)=2, f'(1)=-3$,证明:在$(1,+\infty)$内 方程 $f(x)=0$ 仅有一实根.

【证】 把 $f(x)$ 在 $x=1$ 处展成一阶泰勒公式

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2$$

$$=2-3(x-1)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2,$$

由题设 $f''(\xi)\leqslant 0$,则$\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-1)^2\leqslant 0$,于是,有

$$f(x)\leqslant 2-3(x-1)=5-3x,$$

可知,取 $x_0>\frac{5}{3}$ 时,$f(x_0)<0$,又 $f(1)=2>0$,

由零值定理,可知 $\exists\,\eta\in\left(1,\frac{5}{3}\right)$,使 $f(\eta)=0$,即方程 $f(x)=0$ 当 $x\geqslant 1$ 时有实根.

又由题设 $x\geqslant 1$ 时处处有 $f''(x)\leqslant 0$,所以 $f'(x)$ 是单调递减的.

于是,当 $x\geqslant 1$ 时,$f'(x)\leqslant f'(1)=-3$,可知 $f(x)$ 当 $x\geqslant 1$ 时是严格单调递减函数,因此,$f(x)=0$ 最多有一个实根.

综上所述,命题得证.

C. 关于方程 $f(x)=0$ 的根的个数的讨论

解题程序:① 求出 $f(x)$ 的驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点,划分 $f(x)$ 的单调增减区间;② 求出 $f(x)$ 的极值(或最值);③ 分析极值(或最值)与 x 轴的相对位置,有时需辅以极限协同分析.

【例 6.18】 讨论方程 $a^x=bx(a>1)$ 的根.

【解】 令 $f(x)=a^x-bx$,则 $f'(x)=a^x\ln a-b$.

(ⅰ) 当$b<0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,由零值定理及单调性,在$(-\infty,+\infty)$内存在且仅存在一个 ξ,使 $f(\xi)=0$,

即 $a^{\xi}=b\,\xi$.

(ⅱ) 当 $b>0$ 时,令 $f'(x)=0$,即 $a^x\ln a-b=0$,

$$\Rightarrow x_0=\log_a\frac{b}{\ln a}=\frac{\ln b-\ln\ln a}{\ln a}(\text{驻点}).$$

因为 $f''(x_0)=a^{x_0}(\ln a)^2<0$,

所以 x_0 为 $f(x)$ 的唯一驻点.

因此 $f(x_0)=a^{\log_a\frac{b}{\ln a}}-b\log_a\frac{b}{\ln a}=\frac{b}{\ln a}-b\frac{\ln b-\ln\ln a}{\ln a}$

$$=\frac{b}{\ln a}[1-\ln b+\ln\ln a]$$

$$=\frac{b}{\ln a}\ln\frac{e\ln a}{b}\text{ 为 } f(x) \text{ 在}(-\infty,+\infty)\text{上的最小值.}$$

因此,当 $f(x_0)<0$,即$\frac{b}{\ln a}\ln\frac{e\ln a}{b}<0 \;\Rightarrow\; \frac{e\ln a}{b}<1$,

即　$b > e\ln a$ 时，方程 $f(x) = 0$ 有两个实根，

当　$f(x_0) > 0$ 时，即 $\frac{e\ln a}{b} > 1$，亦即 $0 < b < e\ln a$ 时方程无实根，

当　$f(x_0) = 0$ 时，即 $\frac{e\ln a}{b} = 1$，即 $b = e\ln a$ 时，方程有唯一根，

当 $b = 0$ 时，原方程 $= a^x > 0$，无实根.

杂　例

【例 6.19】　在什么条件下方程 $x^3 + px + q = 0$ 有：(1) 一个实根；(2) 三个实根. 在平面 (p, q) 上描出其范围.

【解】　令 $f(x) = x^3 + px + q$，　$f'(x) = 3x^2 + p$，　$f''(x) = 6x$.

(1) 若 $p > 0$，则 $f'(x) > 0$，$f(x)$"↗"，又 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内只有一个实根.

(2) 若 $p < 0$，得驻点：$x_1 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$，$x_2 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

因为 $f''(x_1) = 6\sqrt{-\frac{p}{3}} > 0$，$f''(x_2) = -6\sqrt{-\frac{p}{3}} < 0$，

所以 $f(x_1) = q + \frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}$ 为 $f(x)$ 的极小值.

$f(x_2) = q - \frac{2p\sqrt{-p}}{3\sqrt{3}}$ 为 $f(x)$ 的极大值.

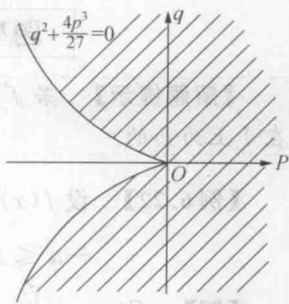


图 6.3

(ⅰ) 当 $f(x_1) < 0$，$f(x_2) > 0$，即 $f(x_1)f(x_2) < 0$，即 $q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0$ 时，方程 $f(x) = 0$ 有三个实根，它们分别在 $(-\infty, x_2)$，(x_2, x_1)，$(x_1, +\infty)$ 内.

(ⅱ) 当 $f(x_2)f(x_1) > 0$，即 $q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ 时，$f(x) = 0$ 只有一个实根. 在 pOq 平面上，$q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$ 的图形为半立方抛物线，见图 6.3.

【例 6.20】　设 n 为偶数，且 $a \neq 0$，证明方程 $x^n + a^n = (x + a)^n$ 仅当 $x = 0$ 时成立.

【证】　用反证法. 设有 $x_0 \neq 0$（不妨设 $x_0 > 0$），使 $x_0^n + a^n = (x_0 + a)^n$ 成立.

令 $f(x) = x^n + a^n - (x + a)^n$，$x \in [0, x_0]$.

因为 $f(x)$ 为 $n - 1$ 次多项式，所以它在 $[0, x_0]$ 上连续，在 $(0, x_0)$ 内可导，又

$$f(0) = 0, f(x_0) = x_0^n + a^n - (x_0 + a)^n = 0,$$

可见洛尔定理满足，于是 ∃ 一个 $\xi \in (0, x_0)$，使

$$f'(\xi) = n\xi^{n-1} - n(\xi + a)^{n-1} = 0$$

$\Rightarrow$　$\xi = \xi + a$　$\Rightarrow$　$a = 0$，与 $a \neq 0$ 矛盾，故命题得证.

【例 6.21】　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可微，$f''(x) > 0$，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \alpha > 0$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \beta < 0$，又存在一点 x_0，使 $f(x_0) < 0$，证明：方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有且仅有两个实根.

【证】　存在性的证明.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$,

所以取 $\varepsilon=\dfrac{\alpha}{2}$, ∃ 一个 $X>0$,

当 $x>X$ 时, $|f'(x)-\alpha|<\dfrac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{2}<f'(x)<\dfrac{3}{2}\alpha$,

因为 $f'(x)>\dfrac{\alpha}{2}>0$,

所以 $f(x)$"↗",于是在 $(x_0,+\infty)$ 内最多有一实根.

在 $[X,x]$ 上应用拉氏定理,有　$f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)$, $\xi\in(X,x)$.

当 $x>X$ 时,有 $f(x)>f(X)+\dfrac{\alpha}{2}(x-X)$,这表明当 x 充分大时 $f(x)>0$,又 $f(x_0)<0$,由零值定理 $\exists x_1\in(x_0,x)$,使 $f(x_1)=0$.

同理可证 $\exists x_2\in(x,x_0)$,使 $f(x_2)=0$.

唯二性的证明.用反证法,若不然, $f(x)=0$ 有三个实根 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$,由洛尔定理 $\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$, $\xi_2\in(x_2,x_3)$ 使得 $f'(\xi_1)=0$, $f'(\xi_2)=0$.再由洛尔定理可知, $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ 使 $f''(\eta)=0$,与题设 $f''(x)>0$ 矛盾.

题型Ⅳ　函数图形在区间 I 上凹凸性的判别

【解题提示】　*若 $f''(x)>0$, $x\in I$,则 $f(x)$ 在 I 上为凹的,若 $f''(x)<0$, $x\in I$,则 $f(x)$ 在 I 上为凸的.*

【例 6.22】　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是正值连续函数,判别 $F(x)=\int_{-a}^{a}|x-u|f(u)\mathrm{d}u$, $-a\leqslant x\leqslant a(a>0)$,在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凹凸性.

【解】

$$F(x)=\int_{-a}^{x}(x-u)f(u)\mathrm{d}u+\int_{x}^{a}(u-x)f(u)\mathrm{d}u$$
$$=x\int_{-a}^{x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{-a}^{x}uf(u)\mathrm{d}u+\int_{x}^{a}uf(u)\mathrm{d}u-x\int_{x}^{a}f(u)\mathrm{d}u,$$
$$F'(x)=\int_{-a}^{x}f(u)\mathrm{d}u+xf(x)-xf(x)-xf(x)-\int_{x}^{a}f(u)\mathrm{d}u+xf(x)$$
$$=\int_{-a}^{x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{x}^{a}f(u)\mathrm{d}u,$$
$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x)>0.$$

所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹的.

【例 6.23】　设 $f(x)$ 为奇函数,且当 $x<0$ 时, $f(x)<0$, $f'(x)\geqslant0$.

令 $F(x)=\int_{-1}^{1}f(xt)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}tf(t^2-x^2)\mathrm{d}t$,判别 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凹凸性.

【解】　因为 $\int_{-1}^{1}f(xt)\mathrm{d}t\xlongequal{令\ u=xt}\int_{-x}^{x}f(u)\dfrac{\mathrm{d}u}{x}=\dfrac{1}{x}\int_{-x}^{x}f(u)\mathrm{d}u$

$$=0\quad(因为\ f(x)\ 为奇函数,\int_{-x}^{x}f(u)\mathrm{d}u=0),$$

$$\int_{0}^{x}tf(t^2-x^2)\mathrm{d}t\xlongequal{令\ v=t^2-x^2}\int_{-x^2}^{0}f(v)\frac{1}{2}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_{-x^2}^{0}f(v)\mathrm{d}v,$$

所以$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-x^2}^{0}f(v)\mathrm{d}v$,

$$F'(x)=\frac{1}{2}[-f(-x^2)](-2x)=xf(-x^2),$$

$F''(x)=f(-x^2)-2x^2f'(-x^2)\leqslant 0$(因为 $f(x)$ 为奇函数,且 $f(x)<0$,所以 $f(-x^2)<0, f'(-x^2)\geqslant 0$),

故 $F(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上是凸的.

题型 V 渐近线类型:(1) 水平渐近线;(2) 铅直渐近线;(3) 斜渐近线.

【解题提示】 利用渐近线的定义求解:

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$,或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$,则 $y=b$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to+x_0^-}f(x)=\infty$,或 $\lim\limits_{x\to+x_0^+}f(x)=\infty$,则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的铅直渐近线.

若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$,则 $y=ax+b$ 为 $f(x)$ 的斜渐近线.

【例 6.24】 设 $y=f(x)=\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}$,求渐近线.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=-\frac{2}{\pi},$$

故 $y=\frac{2}{\pi}$ 及 $y=-\frac{2}{\pi}$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 使 $f(x)$ 没有意义的点:$x=-1, x=0, x=1$,

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\infty$,$x=-1$ 是铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\frac{8\mathrm{e}}{\pi}$,所以 $x=1$ 不是铅直渐近线.

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=3\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\arctan x}=\infty$,所以 $x=0$ 为铅直渐近线.

【例 6.25】 求笛卡尔曲线 $x^3+y^3-3axy=0$ 的斜渐近线.

【解】 令 $y=tx$,则 $x^3+y^3-3axy=0$ 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^3}\\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}$,$x\to\infty\Leftrightarrow t\to-1$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{1+t^3}{3at}=\lim_{t\to-1}t=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{t\to-1}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right]$$

$$=\lim_{t\to-1}\frac{3at(t+1)}{(1+t)(t^2-t+1)}=-a,$$

故笛卡尔曲线的斜渐近线为 $y=-x-a$. 即 $x+y+a=0$.

§2　定积分的应用

题型Ⅰ　微元法及其应用

在$[a,b]$的任一子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上建立所求量M与函数$f(x)$及自变量x的微分$\mathrm{d}x$之间的关系：　　$\mathrm{d}M=f(x)\mathrm{d}x$　　㊟

从而求出所求量 $M=\int_a^b \mathrm{d}M=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的方法，称为利用定积分解题的微元法.

解题程序：① 选择坐标系，确定积分变量. 选积分变量的原则：所求量M与积分变量能建立起联系；尽量使$[a,b]$上构造的关系式㊟简单，个数少；② 利用"去弯取直，以不变代变"的思想获得微元关系式㊟；③ 写出积分式并求解.

【例 6.26】　求曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴所围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得旋转体体积.

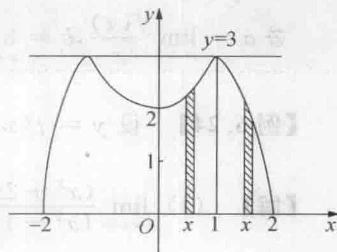


图 6.4

【解】　$y=3-|x^2-1|$

$$=\begin{cases}x^2+2, & |x|\leqslant 1\\ 4-x^2, & 1<x\leqslant 2 \text{ 或 } -2\leqslant x<-1\end{cases},$$

由图 6.4 的对称性可知，只要计算出第Ⅰ象限的图形绕直线 $y=3$ 旋转的体积，然后 2 倍即可得所求旋转体体积.

设旋转体在$[0,1]$上的体积为V_1，在$[1,2]$上的体积为V_2，则它们的体积元素分别为

$\mathrm{d}V_1=\pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x$,

$\mathrm{d}V_2=\pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x$,

由对称性求出体积

$$V=2(V_1+V_2)=2\pi\int_0^1\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x=2\pi\left(8x+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{448}{15}\pi.$$

【例 6.27】　半径为R，比重为δ(大于1)的球，沉入深为H(大于$2R$)的水池底，现将其从水中取出，需作多少功?

【解】　建立坐标系，如图 6.5 所示. 将球从水底取出所做的功分为两部分：

(1) 将球从池底提升到球顶面与水面相齐时所做的功 W_1.

(2) 将球进一步提高，到球底接触水平面所作功为 W_2.

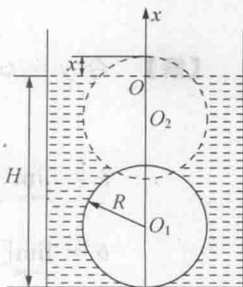


图 6.5

在水中所用外力 $F_{外}=$ 球重 $-$ 浮力 $=\frac{4}{3}\pi R^3\delta-\frac{4}{3}\pi R^3$,

于是

$$W_1=F_{外}(H-2R)=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1)(H-2R),$$

球从水中提高 x 单位时，所用外力 $F_{外}$ 为

$$F_{外}=\frac{4}{3}\pi R^3\delta-\text{水下部分球缺的浮力}$$
$$=\frac{4}{3}\pi R^3\delta-\pi\left(R-\frac{h}{3}\right)h^2$$
$$=\frac{4}{3}\pi R^3\delta-\pi(2R-x)^2\left[R-\frac{1}{3}(2R-x)\right]=\frac{\pi}{3}[4R^3(\delta-1)-x^3+3Rx^2],$$

其中 h 为球缺的高，故所需做的功 W_2 为

$$W_2=\frac{\pi}{3}\int_0^{2R}[4R^3(\delta-1)-x^3+3Rx^2]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{3}\left[4R^3(\delta-1)x-\frac{x^4}{4}+Rx^3\right]_0^{2R}=\frac{4}{3}\pi R^4(2\delta-1),$$

故将球从池底取出外力需作功为 $W=W_1+W_2=\frac{4}{3}\pi R^3[R+(\delta-1)H]$.

【例 6.28】 设有一半径为 R 的平面圆板，其面密度为 $\mu=4\rho^2+3\rho$，ρ 为圆板上的点到圆板中心的距离，求该圆板的质量 M.

【解】 由于面密度是点的函数，与圆板中心等距离的点密度相等. 因此，用微元法分析时应按图示的方法进行分划. 图 6.6 中阴影部分的质量为 $\mathrm{d}M=2\pi\rho\mathrm{d}\rho(4\rho^2+3\rho)=(8\pi\rho^3+6\pi\rho^2)\mathrm{d}\rho$，

故圆板的质量 $M=\int_0^R(8\pi\rho^3+6\pi\rho^2)\mathrm{d}\rho=2\pi R^3(R+1)$.

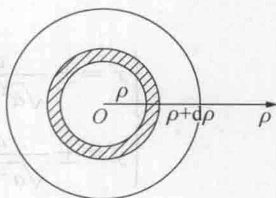


图 6.6

注　用微元法分析问题时对图形的分划，究竟是条形分划，圈形分划还是层面分划，要根据具体问题的几何或物理意义确定.

题型 Ⅱ　求平面图形的面积的求法

【解题提示】 依图形的边界方程的类型分别用

$$S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x,$$

$$S=\left|\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t\right|\text{ 或 }\left|\int_\alpha^\beta x(t)y'(t)\mathrm{d}t\right|\text{ 或 }S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta|\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)|\mathrm{d}\theta\text{ 表示.}$$

【例 6.29】 设曲线 $y=\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴，y 轴所围图形面积被曲线 $y=a\sin x$，$y=b\sin x(a>b>0)$ 三等分(见图 6.7)，试确定 a,b 的值.

【解】 由 $y=\cos x,y=a\sin x$ 得 $\tan x=\frac{1}{a}\Rightarrow x_1=\arctan\frac{1}{a}$，

同理可求得 $x_2=\arctan\frac{1}{b}$.

因为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1$，

所以 $D_1=D_2=D_3=\frac{1}{3}$，

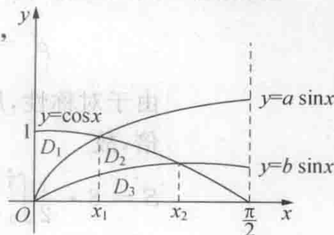


图 6.7

$$D_1=\frac{1}{3}=\int_0^{x_1}(\cos x-a\sin x)\mathrm{d}x=\sin x_1+a\cos x_1-a$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}-a=\sqrt{1+a^2}-a\Rightarrow a=\frac{4}{3},$$

$$D_3=\frac{1}{3}=\int_0^{x_2}b\sin x\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$$

$$=-b\cos x_2+b+1-\sin x_2$$

$$=-\frac{b^2}{\sqrt{1+b^2}}+b+1-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$=1+b-\sqrt{1+b^2}\quad\Rightarrow b=\frac{5}{12}.$$

【例 6.30】　求两椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$与$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$的公共部分的面积 S.

【解】　解联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\end{cases}$得出两椭圆的交点

$\begin{cases}x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ y=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$，在第一象限的交点坐标$\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$，

由于对称性，可知 $S=\pi ab-2S_*$，

$$S_*=2\left(\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\right),$$

对第一个积分作变换 $x=b\sin t$，第二个积分令 $x=a\sin t$ 得

$$S_*=2\left(ab\int_0^{\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos^2t\mathrm{d}t-ab\int_0^{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos^2t\mathrm{d}t\right)$$

$$=2ab\int_{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\cos^2t\mathrm{d}t=ab\int_{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}(1+\cos2t)\mathrm{d}t$$

$$=ab(t+\sin t\cos t)\Big|_{\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}=ab\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right).$$

故 $S=\pi ab-2ab\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)=ab\left[\pi-2\arcsin\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\right].$

【另解】　用极坐标计算. 令 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，得两椭圆的极坐标方程分别为

$$\rho^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta},\quad\rho^2=\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta},$$

由于对称性，所求图形面积可看作图 6.8 中阴影部分的 8 倍，故

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{\text{令 }t=\tan\theta}4a^2b^2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{a^2+b^2t^2}=4ab\left(\arctan\frac{b}{a}\right).$$

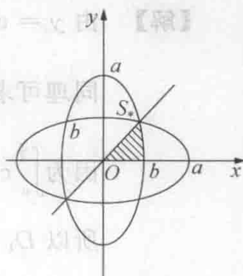


图 6.8

题型Ⅲ　求立体体积

【解题提示】 ① 已知形体的一个平行截面积 $S(x)$，则形体体积 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. ② 求旋转体体积. 平面曲线 $y=f(x), a\leqslant x\leqslant b$ 绕 x 轴旋转体体积 $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，绕 y 轴旋转的旋转体体积 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

【例 6.31】 求柱体 $x^2+y^2\leqslant a^2$ 与 $x^2+z^2\leqslant a^2$ 相贯部分的体积 V.

【解】 图 6.9 仅画出两个柱体相贯部分在第一卦限部分的形体，其中阴影部分为垂直于 x 轴的平面所截形体的截面，其面积 $S(x)$ 为

$$S(x)=z(x)y(x)=\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{a^2-x^2}=a^2-x^2.$$

由于对称性，两柱体相贯部分的体积可看作第一卦限部分的 8 倍.

故　$V=8\int_0^a S(x)\mathrm{d}x=8\int_0^a (a^2-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{16}{3}a^3.$

图 6.9

【例 6.32】 求直线 $L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 绕 z 轴旋转所得旋转面与两平面 $z=0, z=1$ 所围成的立体体积(见图 6.10).

【解】 直线：$L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{z-1}{2},\end{cases}$

在 z 轴截距为 z 的水平截面截此旋转体所得截面为一个圆，半径为

$$R=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2},$$

于是，截面面积 $S=\pi R^2=\pi\left[1+\left(\dfrac{z-1}{2}\right)^2\right]$，

故旋转体体积 $V=\pi\int_0^1\left[1+\dfrac{(z-1)^2}{4}\right]\mathrm{d}z=\dfrac{13}{12}\pi.$

图 6.10

【例 6.33】 求心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 所围平面图形绕极轴旋转所得旋转体体积.

【解】 由图形的对称性，整体图形绕极轴旋转所得旋转体体积相当于阴影部分图形(如图 6.11 所示)绕极轴旋转所得旋转体体积.

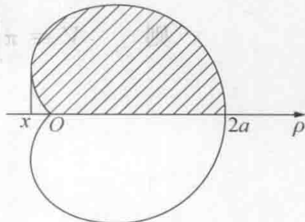


图 6.11

$$V=\pi\int_{x_0}^{2a}y^2(x)\mathrm{d}x-\pi\int_{x_0}^{0}y^2(x)\mathrm{d}x,$$

因为 $x=\rho\cos\theta=a(1+\cos\theta)\cos\theta$，

$\qquad y=\rho\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta$，

所以 $V=\pi\int_{\theta_0}^{0}a^2(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta\cdot a(-\sin\theta-\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta$

$$-\pi\int_{\theta_0}^{\pi} a^3(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta(-\sin\theta-\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\sin^2\theta(\sin\theta+\sin 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

【例 6.34】 将抛物线 $y=x^2-ax$ 在横坐标 0 与 $c(c>a>0)$ 之间的弧段绕 x 轴旋转，问 c 为何值时，所得旋转体体积 V 等于弦 OP（P 为抛物线 $x=c$ 的交点）绕 x 轴旋转所得锥体体积 $V_{锥}$.

【解】 如图 6.12 所示，阴影部分绕 x 轴旋转所得旋转体体积 V 为

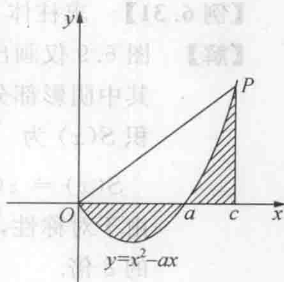


图 6.12

$$V=\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x+\pi\int_a^c y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^c(x^2-ax)^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^c(x^4-2ax^3+a^2x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\pi c^3\left(\frac{1}{5}c^2-\frac{1}{2}ac+\frac{1}{3}a^2\right),$$

弦 OP 绕 x 轴旋转所得锥体体积 $V_{锥}$ 为

$$V_{锥}=\frac{1}{3}\pi y^2c=\frac{1}{3}\pi(c^2-ac)^2c=\frac{1}{3}\pi c^3(c-a)^2,$$

由题设 $V=V_{锥}$，则有

$$\frac{1}{3}\pi c^3(c-a)^2=\pi c^3\left(\frac{1}{5}c^2-\frac{1}{2}ac+\frac{1}{3}a^2\right)\Rightarrow c=\frac{5}{4}a.$$

【例 6.35】 求由曲线 $x^2-y^2=2$，$x+y=\sqrt{2}$，$x+y=3\sqrt{2}$，$y=x$ 所围成的图形绕直线 $y=x$ 旋转所成的旋转体体积.

【解】 如图 6.13. 将坐标系 xOy 作逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$，设新坐标系为 uOv，有坐标变换公式

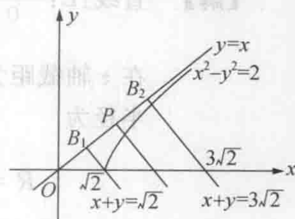


图 6.13

$$\begin{cases} u=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ v=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-x) \end{cases}$$

于是　　$x^2-y^2=2 \Rightarrow uv=-1$，

$x+y=\sqrt{2} \Rightarrow u=1$，

$x+y=3\sqrt{2} \Rightarrow u=3$，

则　　$$V=\pi\int_1^3\left(-\frac{1}{u}\right)^2\mathrm{d}u=\pi\int_1^3\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u=\pi\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^3=\frac{2}{3}\pi.$$

第七章* 向量代数与空间解析几何

题型Ⅰ 向量的运算

【解题提示】 利用点积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 的定义和运算性质求解.

【例 7.1】 填空题

(1) 设 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=5,(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{2}{3}\pi$,则 $\lambda=$ ________ 时,向量 $\vec{m}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$ 与 $\vec{n}=3\vec{a}-\vec{b}$ 互相垂直.

(2) 设 $\vec{m}=2\vec{a}+3\vec{b},\vec{n}=3\vec{a}-\vec{b},|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1.(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{\pi}{3}$,则 $|\vec{m}\times\vec{n}|=$ ________.

(3) 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 均为单位向量,且有 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,则 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=$ ________.

(4) 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$,则 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$ ________.

(5) 设向量 $\vec{x}$ 垂直于向量 $\vec{a}=\{2,3,1\}$ 和 $\vec{b}=\{1,-1,3\}$,与 $\vec{c}=\{2,0,2\}$ 的数量积为 -10,则 $\vec{x}=$ ________.

(6) 设 $\vec{a},\vec{b}$ 两个非零向量,$|\vec{b}|=1,(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{\pi}{3}$,则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=$ ________.

【解】 (1) 由题设 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$,即

$$(\lambda\vec{a}+17\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=3\lambda|\vec{a}|^2+(51-\lambda)\vec{a}\cdot\vec{b}-17|\vec{b}|^2=0,$$

亦即 $12\lambda+(51-\lambda)2\times5\cos\frac{2\pi}{3}-17\times5^2=0$

$$\Rightarrow17\lambda-680=0\Rightarrow\lambda=40.$$

(2) $\vec{m}\times\vec{n}=(2\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})$

$$=6\vec{a}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}-2\vec{a}\times\vec{b}-3\vec{b}\times\vec{b}=11\vec{b}\times\vec{a},$$

$$|\vec{m}\times\vec{n}|=11|\vec{b}||\vec{a}|\sin(\vec{a}\wedge\vec{b})=11\times1\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=11\sqrt{3}.$$

(3) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$=\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2$$

$$\xlongequal[\text{均为单位向量}]{\text{因为}\vec{a},\vec{b},\vec{c}}3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c})=0,$$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}=-\frac{3}{2}.$

(4) $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{b})\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+0+0+0+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c} = 2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 4.$$

(5) 因为$\vec{x}\perp\vec{a},\vec{x}\perp\vec{b}$，

所以$\vec{x}\,/\!/\,\vec{a}\times\vec{b}$，

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10\vec{i}-5\vec{j}-5\vec{k},$$

令　$\vec{x} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})\{10\lambda,-5\lambda,-5\lambda\}$，

又　$\vec{x}\cdot\vec{c} = 0$，

即　$\{10\lambda,-5\lambda,-5\lambda\}\cdot\{2,0,2\} = 10\lambda = -10 \Rightarrow \lambda = -1$，

故　$\vec{x} = \{-10,5,5\}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x[|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|]}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\vec{a}+x\vec{b})\cdot(\vec{a}+x\vec{b})-\vec{a}\cdot\vec{a}}{x[|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|]} = \lim_{x\to 0}\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+x\vec{b}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|}$$

$$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = |\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

【例 7.2】 设$\vec{a} = \{1,1,1\},\vec{b} = \{-1,2,1\},\vec{c} = \{1,0,-1\},\vec{m} = (2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})+(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{a}+\vec{b})$，求$|\vec{m}|$.

【解】 $\vec{m} = 2\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}-2\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b}$

$$= \vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},$$

故　$|\vec{m}| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$.

【例 7.3】 试证$\vec{a} = -\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k},\vec{b} = 2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k},\vec{c} = -3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$在同一平面上，并将$\vec{c}$用$\vec{a},\vec{b}$表示出来.

【解】 因为$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$，　所以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$三向量共面.

令$\vec{c} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，其中$\lambda,\mu$为待定常数，则由

$$-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k} = \lambda(-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})+\mu(2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\lambda+2\mu = -3\\ 3\lambda-3\mu = 12\\ 2\lambda-4\mu = 6\end{cases} \Rightarrow \lambda = 5,\mu = 1,$$

故　$\vec{c} = 5\vec{a}+\vec{b}$.

题型 Ⅱ　求平面方程

【解题提示】 若题设条件中平面通过某已知点，则一般用平面的点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$. 此时问题转化为求平面的法矢量$\vec{n} = \{A,B,C\}$. 若题设条件中平面通过一条直线(该直线用两平面的交线表示)，则用平面束方程处理.

【例 7.4】 求通过点(1,2,−1)且与直线$\begin{cases}2x-3y+z-5=0\\3x+y-2z-4=0\end{cases}$垂直的平面方程.

【解】 设所求平面为:$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0$,

$\vec{n}=\{A,B,C\}$为其法向量,直线的方向向量$\vec{s}$为

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=\{5,7,11\},$$

因为平面与已知直线垂直,

所以$\vec{n}\parallel\vec{s}$,取$\vec{n}=\vec{s}=\{5,7,11\}$,

则所求平面方程为 $5(x-1)+7(y-2)+11(z+1)=0$,

即 $5x+7y+11z-8=0$.

【例 7.4】 求通过点(1,2,−1)且通过直线L:$\begin{cases}x=2+3t\\y=2+t\\z=1+2t\end{cases}$的平面方程.

【解】 设所求平面方程为$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0$. 直线L的方向向量$\vec{s}=\{3,1,2\}$(注:参数方程中,参数t前的系数即为直线方程的方向系数),由于平面通过直线L,所以$\vec{n}=\{A,B,C\}\perp\vec{s}=\{3,1,2\}$,于是

$$3A+B+2C=0,\qquad ①$$

又所给直线上的点(2,2,1)也在所求平面上,于是有

$$A+2C=0.\qquad ②$$

联立①,②,解出

$$A=-2C, B=4C,$$

故所求平面为

$-2C(x-1)+4C(y-2)+C(z+1)=0$, 即 $-2x+4y+z-5=0$.

【例 7.5】 求过点(1,1,1)且与平面Π_1:$x-2y+3z=1$和平面Π_2:$x+y-z=2$均垂直的平面.

【解】 设所求平面方程为$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0$,$\vec{n}=\{A,B,C\}$,

因为所求平面$\perp$平面Π_1与Π_2. 所以

$\vec{n}\perp\vec{n}_1$且$\vec{n}\perp\vec{n}_2$. 于是

$$\vec{n}\parallel\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\{-1,4,3\},$$

取 $\vec{n}=\{-1,4,3\}$,则所求平面Π:$-(x-1)+4(y-1)+3(z-1)=0$,

即 $-x+4y+3z-6=0$.

【例 7.6】 求过直线$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$和$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$的平面方程.

【解】 所求平面通过第一条直线,因此通过第一条直线上的点(2,−2,3),设所求平面方程为 $A(x-2)+B(y+2)+C(z-3)=0$,

由题设 $\vec{n}=\{A,B,C\}\perp\vec{s}_1=\{1,-1,2\}$,$\vec{n}\perp\vec{s}_2=\{-1,2,1\}$,

于是，可取 $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$，

故所求平面方程为 $-5(x-2) - 3(y+2) + z - 3 = 0$，

即 $-5x - 3y + z + 1 = 0$.

题型 Ⅲ　求空间直线方程

【解题提示】 若题设条件中直线通过某定点，则一般用直线的对称式或参数式方程求解，此时将问题转化为求直线的方向向量. 凡题设条件中提及直线与直线、直线与平面相交的问题，一般将所求直线方程设成参数式，有时也用其一般式.

【例 7.7】 求通过 $P(1,2,1)$ 点，垂直于直线 $L_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$ 又与直线 $L_2: \dfrac{x}{2} = y = -z$ 相交的直线方程.

【解】 设通过 $P(1,2,1)$ 的直线方程为 $\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 2 + mt, \\ z = 1 + nt \end{cases}$

因为　所求直线 $L \perp L_1$，

所以　$3l + 2m + n = 0$，　①

又 L_2 可写成 $\begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$，

因为 L 与 L_2 相交，将该方程组与 L 的参数方程联立，解得

$$n + l = m,\tag{②}$$

解联立方程组 ①，② 得 $l = -\dfrac{3}{5}n, m = \dfrac{2}{5}n$，

令 $n = 5$，则 $l = -3, m = 2$，

故所求直线 L 的方程为 $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 2t. \\ z = 1 + 5t \end{cases}$

【例 7.8】 设直线通过点 $P(-3,5,-9)$ 且和两直线 $L_1: \begin{cases} y = 3x + 5 \\ z = 2x - 3 \end{cases}$，$L_2: \begin{cases} y = 4x - 7 \\ z = 5x + 10 \end{cases}$ 相交，求此直线方程.

【解】 设所求直线方程为 $\begin{cases} x = -3 + lt \\ y = 5 + mt \\ z = -9 + nt \end{cases}$，

将其代入 L_1 方程中，有 $\begin{cases} (m - 3l)t = -9 \\ n = 2l \end{cases}$，　①

将其代入 L_2 方程中，有 $\dfrac{m - 4l}{n - 5l} = -6$，　②

将 ① 中的 $n = 2l$ 代入 ②，得 $m = 22l$，

令 $l = 1$，则 $m = 22, n = 2$，

故所求直线方程为 $\begin{cases} x=-3+t \\ y=5+22t. \\ z=-9+2t \end{cases}$

【例 7.9】 求与二直线 $L_1:\begin{cases} x=3z-1 \\ y=2z-3 \end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases} y=2x-5 \\ z=7x+2 \end{cases}$ 垂直且相交的直线方程.

【解】 直线 L_1 中令 $z=t$,则其参数方程为$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-3+2t \\ z=t \end{cases}$,其方向向量$\vec{s}_1=\{3,2,1\}$,

同理可得直线 L_2 的方向向量$\vec{s}_2=\{1,2,7\}$,

$$\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=12\vec{i}-20\vec{j}+4\vec{k},$$

由题设所求直线 L 的方向向量$\vec{s}\ /\!/\ \vec{s}_1\times\vec{s}_2$.

令 $\vec{s}=\frac{1}{4}\vec{s}_1\times\vec{s}_2=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$.

已知直线 L 分别与 L_1,L_2 相交,则 L 和 L_1 在同一平面 Π_1 上,L 和 L_2 在同一平面 Π_2 上,故 L 在平面 Π_1 与 Π_2 的交线上.

求 L 与 L_2 所在平面 Π_1. 首先在直线 L_1 上任取一点 M_1,

设 $z_1=0$,代入 L_1 方程,求出 $x_1=-1,y_1=-3$,则 M_1 为$(-1,-3,0)$,

$$\vec{n}_1=\vec{s}\times\vec{s}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-7\vec{i}+0\vec{j}+21\vec{k},$$

所求平面 Π_1 的方程:$-7(x+1)+0(y+3)+21(z-0)=0$,即 $x-3z+1=0$,

同理可求 L 与 L_2 所确定的平面 Π_2:$37x+20y-11z+122=0$.

故所求直线方程为$\begin{cases} x-3z+1=0 \\ 37x+20y-11z+122=0 \end{cases}$.

题型Ⅳ 平面与平面、平面与直线、直线与直线的关系

【解题提示】 这种题型的处理是通过分析平面的法向量、直线的方向向量之间的关系得出的.

【例 7.10】 求直线 $L_1:\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$ 和直线 $L_2:\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$ 间的夹角.

【解】 直线 L_1 的方向向量$\vec{s}_1$,

$$\vec{s}_1\ /\!/\ \vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{1,2,1\}\times\{1,-2,1\}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=4\vec{i}+0\vec{j}-4\vec{j},$$

取$\vec{s}_1=\frac{1}{4}\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\{1,0,-1\}$,

直线 L_2 的方向向量 $\vec{s}_2$，

$$\vec{s}_2 \parallel \vec{n}_3 \times \vec{n}_4 = \{1,-1,-1\} \times \{1,-1,2\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 0\vec{k},$$

取 $\vec{s}_2 = \dfrac{1}{3}\vec{n}_3 \times \vec{n}_4 = \{-1,-1,0\}$，

直线 L_1 与 L_2 的夹角，即为 $\vec{s}_1$ 与 $\vec{s}_2$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|} = \frac{|\{1,0,-1\}\{-1,-1,0\}|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

所以 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

【例 7.11】　求直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+2z-2=0 \end{cases}$ 与平面 $x-2y+3z-3=0$ 间夹角的正弦.

【解】　直线的方向向量 $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \{1,-3,-2\}$，

平面的法矢量 $\vec{n} = \{1,-2,3\}$，

设直线与平面的夹角为 θ，则

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|} = \frac{1\times1+(-2)\times(-3)+3\times(-2)}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14}.$$

题型 V　点到平面、点到直线的距离，两异面直线的距离

【解题提示】　设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为 d，则

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L:\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离为 d，则 $d = \dfrac{|\vec{s}\times\overrightarrow{MP}|}{|\vec{s}|}$，其中 $\vec{s} = \{l,m,n\}$，$\overrightarrow{MP} = \{x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1\}$.

两直线 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ 与直线 $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$ 之间的距离，一般利用直线的参数式化为二元函数最小值简单.

【例 7.12】　求直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases} x=z+1 \\ y=2z-3 \end{cases}$ 之间的距离.

【解】　直线 L_1 的参数式：$\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}$，$t$ 为参数，直线 L_2 的参数式：$\begin{cases} x=s+1 \\ y=2s-3 \\ z=s \end{cases}$，$s$ 为参数.

设直线 L_1 与 L_2 之间的距离为 d，则

$d =$ 直线 L_1 与 L_2 任两点间距离 l 的最小值，

$$l=\sqrt{(t-s)^2+4(t-s+1)^2+(t-s)^2}$$
$$=\sqrt{(1+t-s-1)^2+(-1+2t-2s+3)^2+(t-s)^2}$$
$$\xlongequal{令 u=t-s}\sqrt{6u^2+8u+4}.$$

则 $u=-\dfrac{8}{2\times 6}=-\dfrac{2}{3}$ 时，

l 取得最小值 $l=\sqrt{6\cdot\dfrac{4}{9}-8\cdot\dfrac{2}{3}+4}$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

题型 Ⅵ 线性代数中线性相关性在解析几何中的应用

【例 7.13】 试讨论两平面 $\begin{cases}\Pi_1:a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ \Pi_2:a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases}$ 的位置关系.

【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix},\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\end{array}\right).$

当 $r(\boldsymbol{A})=2$ 时，a_1,b_1,c_1 与 a_2,b_2,c_2 不成比例，所以两平面相交于一条直线.

当 $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$ 时，a_1,b_1,c_1 与 a_2,b_2,c_2 成比例，但它们的比 $\neq\dfrac{d_1}{d_2}$，所以两平面平行.

当 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=1$ 时，a_1,b_1,c_1,d_1 与 a_2,b_2,c_2,d_2 成比例，所以两平面重合.

【例 7.14】 试讨论三平面 $\begin{matrix}\Pi_1:a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ \Pi_2:a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ \Pi_3:a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{matrix}$ 的位置关系.

【解】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix},\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{pmatrix},$

(1) 若 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3$ 时，三平面相交于一点，因为此时方程组只有唯一解.

(2) $r(\overline{\boldsymbol{A}})=3,r(\boldsymbol{A})=2$ 时，三平面不相交，因为方程组无解.

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的三个行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，当 k_1,k_2,k_3 均不为零时，三平面中任意两平面的交线与另一平面平行；当 k_1,k_2,k_3 中有一个为 0 时，三平面中有两个平行，另一平面与这两平面相交.

(3) $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=2$ 时，三平面相交于一直线，因为此时方程组有无穷多组解.

因为 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，所以 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的三个行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，当 k_1,k_2,k_3 均不为零时，三平面互异；当 k_1,k_2,k_3 中有一个为零时，三平面中有两平面相重合.

(4) $r(\overline{\boldsymbol{A}})=2,r(\boldsymbol{A})=1$ 时，三平面不相交，因为这时方程组无解，又 $r(\boldsymbol{A})=1$，所以三平面平行，还因为 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，所以三平面中最少有两平面互异.

(5) $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=1$ 时，三平面重合.

【例 7.15】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$，则三条直线：$L_1, L_2, L_3$ 相交于一点的充要条件是　　【　】

$L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$　　其中 $a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1,2,3.$

$L_3: a_3x + b_3y + c_3 = 0$

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(C) $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 相关，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 无关.

【解】 L_1, L_2, L_3 相交于一点 $\Leftrightarrow$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2, \\ a_3x + b_3y = -c_3 \end{cases}$$

有唯一解 $\Leftrightarrow r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = n$ 即

$$r\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = 2,$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

【例 7.16】 设 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 满秩. 则两直线 $L_1: \dfrac{x - a_3}{a_1 - a_2} = \dfrac{y - b_3}{b_1 - b_2} = \dfrac{z - c_3}{c_1 - c_2}$ 与

$L_2: \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_3} = \dfrac{y - b_1}{b_2 - b_3} = \dfrac{z - c_1}{c_2 - c_3}$　　【　】

(A) 交于一点.　　(B) 重合.　　(C) 平行不重合.　　(D) 异面.

【解】 L_1 的方向向量 $\vec{s}_1 = \{a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2\}$，

L_2 的方向向量 $\vec{s}_2 = \{a_2 - a_3, b_2 - b_3, c_2 - c_3\}$，

因为 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$

所以 $\vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$，排除选(B)，(C).

又设通过 (a_3, b_3, c_3)，(a_1, b_1, c_1) 的向量为 $\{a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1\}$

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 & c_1 - c_2 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{加到第一行}]{\text{第二行}} \begin{vmatrix} a_1 - a_3 & b_1 - b_3 & c_1 - c_3 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 & c_2 - c_3 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \end{vmatrix} = 0,$$

故应选(A).

【例 7.17】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{\alpha}_3 = (c_1, c_2, c_3), \boldsymbol{\alpha}_4 = (d_1, d_2, d_3)$，则三平面

$\Pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$

$\Pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$,

$\Pi_3: a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$

两两相交成三条平行直线的充要条件是 【 】

(A) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=1, r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$.

(B) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2, r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任意两个均线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

【解】 (A) 表示三个平面互相平行，至多有两个重合. (B) 表示条件必要，但不充分.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任两个线性无关 $\Leftrightarrow$ 任两个平面均相交，而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ 方程组无解（即排除三平面交于一条直线的情形），可见 (C) 入选.

题型 Ⅶ 投影线方程

【解题提示】 解题程序：① 先求出空间曲线 Γ 在给定平面上的投影柱面方程；② 将投影柱面方程与给定平面的方程联立，即得所求投影线方程.

求投影柱面方程的基本方法有：① 消去变量法；② 消去参数法.

【例 7.18】 求两曲面 $x^2+y^2=z$ 与 $-2(x^2+y^2)+z^2=3$ 的交线在 xOy 平面上的投影曲线.

【解】 在方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=z\\-2(x^2+y^2)+z^2=3\end{cases}$ 中消去 z，得 $(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)-3=0\Rightarrow$

$(x^2+y^2-3)(x^2+y^2+1)=0$，即 $x^2+y^2=3$，故所求投影线方程为

$\begin{cases}x^2+y^2=3\\z=0\end{cases}$.

【例 7.19】 求直线 $L: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x-y+2z=1$ 上的投影直线 L_0 的方程.

【解】 求出通过直线 L 且垂直于平面 Π 的平面 Π^* 的方程.

直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\{1,1,-1\}$，平面 Π 的法向量 $\vec{n}=\{1,-1,2\}$，设平面 Π^* 的法向量为 $\vec{n}^*$，由投影柱面的意义有

$$\vec{n}^*=\vec{s}\times\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k},$$

又平面 Π^* 通过直线 L，可知直线 L 上的点 $P(1,0,1)$ 在平面 Π^* 上，于是 Π^* 的方程为

$$1\cdot(x-1)-3(y-0)-2(z-1)=0,$$

即 $x-3y-2z+1=0$,

所求的投影方程为 $\begin{cases}x-3y-2z+1=0\\x-y+2z-1=0\end{cases}$.

【例 7.20】 设曲线方程为 $\begin{cases}2x^2+4y+z^2=2z\\x^2-8y+3z^2=12\end{cases}$，求它在三坐标面上的投影.

【解】 通过配方，将上述方程组变形为

$$\begin{cases}2x^2+4y+(z-2)^2=4\\x^2-8y+3(z-2)^2=12\end{cases}\Rightarrow\quad x^2+4y=0,$$

于是在 xOy 平面上的投影方程为 $\begin{cases}x^2+4y=0\\z=0\end{cases}$，

同理可求曲线在 xOz，yOz 坐标面上的投影方程分别为

$$\begin{cases}x^2+z^2=4z\\y=0\end{cases}\text{ 和 }\begin{cases}z^2-4y=4z\\x=0\end{cases}.$$

题型Ⅷ 旋转面方程

【解题提示】 求旋转曲面方程的基本方法：平面曲线绕某坐标轴旋转，则该坐标轴对应的变量不变，而曲线方程中另一变量改写成该变量与第三个变量平方和的正负平方根．例如，平面曲线

$$L:\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}.$$

(1) 曲线 L 绕 x 轴旋转所成的旋转面方程：$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

(2) 曲线 L 绕 y 轴旋转所成的旋转面方程：$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

【例 7.21】 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面的方程.

【解】 把 L 写成参数方程 $\begin{cases}x=t+1\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$，固定一个 t，即得 L 上一点 $M(1+t,2t,1+t)$ 到 z 轴的距离为 $d=\sqrt{(t+1)^2+4t^2}=\sqrt{1+2t+5t^2}$，点 M 绕 z 轴旋转得一空间圆周 $\begin{cases}x^2+y^2=(t+1)^2+4t^2\\z=1+t\end{cases}$，消去参数 t，得 $x^2+y^2=z^2+4(z-1)^2$，这就是所求的旋转面方程.

第八章　多元函数微分学

题型 Ⅰ　判别 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在的方法

【解题提示】 一般是选择两条不同的路径，若沿该两路径的极限不相等，即可断言极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在.

例如，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{P_n(x,y)}{x+y}$，当 $P_n(x,y)$ 为 x,y 的多项式，且 $P_n(x,y)$ 与 $x+y$ 没有公因子时是不存在的. 其证法是分别取两条路径 $y=x, y=x^m-x$（其中 m 为 $P(x,y)$ 中最低项的次数），若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=x}} \dfrac{P_n(x,y)}{x+y}$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=x^m-x}} \dfrac{P_n(x,y)}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P_n(x,x^m-x)}{x^m}$ 不相等，即可证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{P_n(x,y)}{x+y}$ 不存在.

【例 8.1】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$.

【解】 (1) 令 $y=x$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\y=x}} \dfrac{x^3}{x^4+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$，

令　$y=x^2$，则原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4+x^4} = \dfrac{1}{2}$，

故　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

(2) 令 $y=x$，则原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^5+x^3}{2x} = 0$，

令　$y=x^3-x$，

则　原极限 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3(x^3-x)+x(x^3-x)^4+x^2(x^3-x)}{x+(x^3-x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^3-x^4+o(x^4)}{x^3} = -1$.

故　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$ 不存在.

题型 Ⅱ　用全微分定义验证一个可导函数的可微性

【解题提示】 只须检验极限：

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'y(x_0,y_0)\Delta y}{\rho} \overset{?}{=} 0,$$

若极根为 0，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，否则不可微，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

【例 8.2】 设 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & \text{当 } x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & \text{当 } x^2+y^2=0 \end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$

处的可微性.

【解】 $\Delta z = f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) = \dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]$,

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

令　$\alpha = \Delta z - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y = \dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]$,

令　$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\alpha}{\rho} \xlongequal{\text{令 }\Delta y=\Delta x} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2}}{\sqrt{2(\Delta x)^2}}\dfrac{\sin 2(\Delta x)^2}{2(\Delta x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$,

故　$z = f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微.

【例 8.3】 设 $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$，则在原点 $(0,0)$ 处，$f(x,y)$

【　】

(A) 偏导数不存在.　　(B) 不可微.

(C) 偏导数存在且连续.　　(D) 可微.

【解】 $f'_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$,

同理　$f'_y(0,0) = 0$.

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2\neq 0 \end{cases},$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2\neq 0 \end{cases}.$$

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f'(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x}\cos\dfrac{1}{2x^2}\right)$ 不存在(因为前项极限为 0，后项不存在)，所以 A 项，C 项不入选.

因为 $\Delta z = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + \alpha = \alpha$(因为 $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$)，

所以 $\alpha = \Delta z = f(0+\Delta x,0+\Delta y) - f(0,0) = \Delta x\cdot\Delta y\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

又因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{|\alpha|}{\rho} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{|\Delta x\Delta y|\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$$\leqslant \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{2}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = 0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\alpha|}{\rho} \geqslant 0,$$

所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\alpha}{\rho} = 0$.　故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 上处可微.

题型Ⅲ 抽象的复合函数的偏导数的求法

【解题提示】 求抽象函数的偏导数时一定要设中间变量 $u,v,w,\cdots$，求高阶偏导数时为了简便常用1,2,3等分别表示它的第一、二、三个同级的中间变量.

偏导数求得正确与否的关键是要弄清函数的复合关系及偏导数的结构：(1) 函数对某自变量的一阶偏导数其项数等于与它有关的中间变量的个数；(2) 每一项等于函数对中间变量的偏导数乘以该中间变量对其指定自变量的偏导数.

一般而言，函数对中间变量的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v},\cdots$ 仍然是以 $u,v,\cdots$ 为中间变量，x,y 为自变量的复合函数，再对它们求偏导数时须重复使用复合函数求偏导的连锁法则.

【例 8.4】 设 $z=xy+xF\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 F 为可导函数，求 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 令 $u=\frac{y}{x}$，则 $z=xy+xF(u)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+xF'(u)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xF'(u)\cdot\frac{1}{x}=x+F'(u),$$

于是
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[y+F(u)-\frac{y}{x}F'(u)\right]+y[x+F'(u)]$$
$$=2xy+xF(u)=z+xy.$$

【例 8.5】 设 $F(x,y(x),z(x))=\varphi(x,y(x))+z(x)\psi(x,y(x))$，其中出现的函数是连续可微的，试计算 $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)$.

【解】 $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+z(x)\frac{\partial \psi}{\partial y}$，　$\frac{\partial F}{\partial z}=\psi(x,y(x))$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)=[\psi(x,y(x))]'_x=\frac{\partial \psi}{\partial x}+y'(x)\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

故
$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+z(x)\frac{\partial \psi}{\partial y}-\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}+y'(x)\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial \varphi}{\partial y}-\frac{\partial \psi}{\partial x}+[z(x)-y'(x)]\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

【例 8.6】 设 $u=f(x-y,y-z,t-z)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}$.

【解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1$，　$\frac{\partial u}{\partial y}=f'_1(-1)+f'_2=-f'_1+f'_2$，

$\frac{\partial u}{\partial z}=-f'_2-f'_3$，　$\frac{\partial u}{\partial t}=f'_3$，

故
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=f'_1+(-f'_1+f'_2)+(-f'_2-f'_3)+f'_3=0.$$

【例 8.7】 设 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$P(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 由 $z=f(u)$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}, \quad ①$$

在方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 两边分别对 x,y 求偏导，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}-P(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}+P(y)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{P(x)}{1-\varphi'(u)},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-P(y)}{1-\varphi'(u)}, \quad ②$$

由 ①，② 有

$$P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}=P(y)f'(u)\frac{P(x)}{1-\varphi'(u)}+P(x)f'(u)\cdot\frac{-P(y)}{1-\varphi'(u)}=0.$$

【例 8.8】 设 $u=f(t),t=\varphi(xy,x^2+y^2)$，其中 f,φ 具有连续的二阶导数及偏导数，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【解】 $t=\varphi(\underset{①}{xy},\underset{②}{x^2+y^2})$，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)\frac{\partial t}{\partial x}=f'(t)[\varphi_1'\cdot y+\varphi_2'\cdot 2x],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[f'(t)(y\varphi_1'+2x\varphi_2')]=f''(t)\frac{\partial t}{\partial x}(y\varphi_1'+2x\varphi_2')+f'(t)\frac{\partial}{\partial x}(y\varphi_1'+2x\varphi_2')$$

$$=f''(t)(y\varphi_1'+2x\varphi_2')^2+f'(t)[y(\varphi_{11}''y+\varphi_{12}''\cdot 2x)+2\varphi_2'+2x(\varphi_{21}''y+\varphi_{22}''\cdot 2x)]$$

$$=f''(t)(y\varphi_1'+2x\varphi_2')^2+f'(t)(y^2\varphi_{11}''+4xy\varphi_{12}''+4x^2\varphi_{22}''+2\varphi_2').$$

【例 8.9】 用变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$，可把 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求 a 值.

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

将以上结果代入原方程，经整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

由题意可知 a 应满足 $6+a-a^2=0$，且 $10+5a\neq 0\Rightarrow a=3$.

题型 Ⅳ　隐函数方程组的微分法

【解题提示】 (1) 由三个变量两个方程所构成的方程组，一般是其中两个变量确定为第三个变量的一元函数，例如，方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 确定隐函数 $y=y(x),z=z(x)$. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 的求法可通过解关于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 的线性方程组完成.

$$\begin{cases} F'_x + F'_y \dfrac{dy}{dx} + F'_z \dfrac{dz}{dx} = 0 \\ G'_x + G'_y \dfrac{dy}{dx} + G'_z \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} F'_y \dfrac{dy}{dx} + F'_z \dfrac{dz}{dx} = -F'_x \\ G'_y \dfrac{dy}{dx} + G'_z \dfrac{dz}{dx} = -G'_x \end{cases}$，将$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$当做未知量用克莱姆法则求解出$\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$.

(2) 由四个变量两个方程所构成的方程组，一般是其中两个变量确定为另两变量的二元函数. 例如，方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$确定函数$u = u(x,y), v = v(x,y)$. $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$；$\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$也可通过解关于$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$；$\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$的线性方程组来完成：

$\begin{cases} F'_x + F'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G'_x + G'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + F'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = -F'_x \\ G'_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + G'_v \dfrac{\partial v}{\partial x} = -G'_x \end{cases}$ 用克莱姆法则求解$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$，同理可求出$\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

【例 8.10】 设$y = g(x,z)$，而z是由方程$f(x-z, xy) = 0$所确定的x, y的函数，求$\dfrac{dz}{dx}$.

【解】 $\begin{cases} y = g(x,z) \\ f(x-z, xy) = 0 \end{cases}$，两个方程三个未知数.

由欲求的结果$\dfrac{dz}{dx}$可知y, z是x的函数. 方程组的两边分别对x求导，则得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = g'_1 + g'_2 \dfrac{dz}{dx} \\ f'_1\left(1 - \dfrac{dz}{dx}\right) + f'_2\left(y + x\dfrac{dy}{dx}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - g'_2 \dfrac{dz}{dx} = g'_1 \\ xf'_2 \dfrac{dy}{dx} - f'_1 \dfrac{dz}{dx} = -f'_1 - yf'_2 \end{cases},$$

解得 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{f'_1 + yf'_2 + xf'_2 g'_1}{f'_1 - xf'_2 g'_2}$.

【例 8.11】 从方程组$\begin{cases} x + y + u + v = 1 \\ x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 2 \end{cases}$中求出$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$.

【解】 方程组的每个方程对x求偏导数，得

$$\circledast \begin{cases} 1 + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ x + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x - v}{v - u}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{u - x}{v - u}$$

方程组 ⊛ 的两边再对x求偏导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ 1 + (\dfrac{\partial u}{\partial x})^2 + u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \end{cases},$$

解得$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1+u_x'^2+v_x'^2}{v-u}=\dfrac{1+\left(\dfrac{x-v}{v-u}\right)^2+\left(\dfrac{u-x}{v-u}\right)^2}{v-u}=\dfrac{(v-u)^2+(x-v)^2+(u-x)^2}{(v-u)^3}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1+u_x'^2+v_x'^2}{u-v}=\frac{(v-u)^2+(x-v)^2+(u-x)^2}{(u-v)^3}.$$

题型 V* 多元函数微分学在几何中的应用

1. 空间曲线的切线和法平面方程

A. 空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\quad t=t_0\ \leftrightarrow\ \Gamma\text{ 上一点 }P(x_0,y_0,z_0),$$

则切线与法平面方程分别为 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$,

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

B. 空间曲线 Γ 一般式方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$,其在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线和法平面方程分别为

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{y'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(x_0)}\\(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0\end{array}\right\}\text{将 }x\text{ 当做参数.}$$

2. 空间曲面在某点处的切平面和法线方程

A. 设空间曲面 Σ 为显式方程 $z=f(x,y)$,则过其上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_P}=\frac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_P}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

B. 设空间曲面 Σ 为隐式方程 $F(x,y,z)=0$,则过其上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面和法线方程分别为

$$F_x'|_P(x-x_0)+F_y'|_P(y-y_0)+F_z'|_P(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{F_x'|_P}=\frac{y-y_0}{F_y'|_P}=\frac{z-z_0}{F_z'|_P}.$$

【例 8.12】 求过直线 $\begin{cases}x+2y+z-1=0\\x-y-2z+3=0\end{cases}$,且与曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{1}{2}z^2\\x+y+2z=4\end{cases}$ 在点 $(1,-1,2)$ 处的切线平行的平面方程.

【解】 由平面束可知过直线的平面方程为

$x+2y+z-1+\lambda(x-y-2z+3)=0$

$\Rightarrow(1+\lambda)x+(2-\lambda)y+(1-2\lambda)z+3\lambda-1=0$,平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{1+\lambda,2-\lambda,1-2\lambda\}$,

曲线$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2}z^2 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$在点$(1,-1,2)$处切线的方向向量可如下求：

$$\begin{cases} 2x+2y\cdot y'_x=\dfrac{1}{2}\times 2zz'_x \\ 1+y'_x+2z'_x=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{在 } P(1,-1,2)} \begin{cases} y'_x+z'_x=1 \\ y'_x+2z'_x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x=3 \\ z'_x=-2 \end{cases},$$

$\boldsymbol{s}=\{1,3,-2\}$，

由题设$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$，即　$1\cdot(1+\lambda)+3(2-\lambda)-2(1-2\lambda)=0$

$\Rightarrow\ \lambda=-\dfrac{5}{2}$. 故所求平面为$3x-9y-12z+17=0$.

【例 8.13】　求平面$lx+my+nz=P$与二次曲面$Ax^2+By^2+Cz^2=1$相切的条件.

【解】　设平面与曲面相切的切点坐标为$P(x_0,y_0,z_0)$，平面的法向量$\boldsymbol{a}=\{l,m,n\}$.

令　$F(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2-1$，则二次曲面在$P(x_0,y_0,z_0)$点的法向量$\boldsymbol{b}=\{F'_x|_P,F'_y|_P,F'_z|_P\}=\{2Ax_0,2By_0,2Cz_0\}$，

因为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，所以$\dfrac{2Ax_0}{l}=\dfrac{2By_0}{m}=\dfrac{2Cz_0}{n}=k$，　①

又　因为$P(x_0,y_0,z_0)$为平面与曲面的切点，

所以$lx_0+my_0+nz_0=P$，　②

$Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2=1$，　③

由①,②,③得　$k=\dfrac{2}{P}$，　④

将④代入①得　$x_0=\dfrac{l}{PA},y_0=\dfrac{m}{PB},z_0=\dfrac{n}{PC}$，

代入②中得$\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}=P^2$即为所求.

题型 Ⅵ　多元微分学的有关证明题

【解题提示】　这是计算型的证明.注意利用对称型(x,y互换式子不变)函数，或类对称型(中间变量互换的同时，自变量也互换，式子不变)函数对自变量求偏导数的简捷求法.

【例 8.14】　设函数$z(x,y)$由方程$F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$确定，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy$.

【解】　令$x+\dfrac{z}{y}$为F的第一个中间变元，$y+\dfrac{z}{x}$为F的第二个中间变元，显然，F是类对称型函数.

方程的两边对x求偏导，得

$F'_1\left(1+\dfrac{z'_x}{y}\right)+F'_2\left(-\dfrac{z}{x^2}+\dfrac{z'_x}{x}\right)=0$，两边同乘以$x^2y$，得

$x^2yF'_1+x^2F'_1z'_x-zyF'_2+xyF'_2z'_x=0$

$\Rightarrow x\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{zyF'_2-x^2yF'_1}{xF'_1+yF'_2}$.　①

将F下角1与2互换且x与y互换，即得$y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{zxF'_1-y^2xF'_2}{yF'_2+xF'_1}$，　②

①＋② 即得命题的证明.

【例 8.15】* 试证:曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任意点处的切平面在各坐标轴上截距的平方和等于常数 a^2.

【解】 令 $F(x,y,z)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}$,显然,$F$ 是对称型函数,所以 $F'_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$,

$F'_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}},F'_z=\frac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}$.

设(x_0,y_0,z_0)为曲面上任一点,于是在该点处曲面的切平面方程为

$x_0^{-\frac{1}{3}}(x-x_0)+y_0^{-\frac{1}{3}}(y-y_0)+z_0^{-\frac{1}{3}}(z-z_0)=0$.

令 $y=z=0$. 得出切平面在 x 轴上的截距为

$x=x_0+x_0^{\frac{1}{3}}(y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})=x_0^{\frac{1}{3}}(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})=x_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$,

由于曲面方程的对称性,可知切平面在 y,z 轴上的截距分别为 $y=y_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}},z=z_0^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}$,

故 $x^2+y^2+z^2=(a^{\frac{2}{3}})^2(x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}+z_0^{\frac{2}{3}})=a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}=a^2$.

【例 8.16】* 证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的切平面通过一定点.

【分析】 所谓定点就是三个坐标均为固定常数的点,由题设可猜想极有可能是以 a,b,c 为坐标的点.

【证】 由方程 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$,有

$f'_x=f'_1\cdot\frac{1}{z-c},\quad f'_y=f'_2\cdot\frac{1}{z-c}$,

$f'_z=-\frac{1}{(z-c)^2}[(x-a)f'_1+(y-b)f'_2]$,则其切平面方程为

$$\frac{f'_1}{z-c}(X-x)+\frac{f'_2}{z-c}(Y-y)-\frac{(x-a)f'_1+(y-b)f'_2}{(z-c)^2}(Z-z)=0,$$

即$[(z-c)(X-x)-(x-a)(Z-z)]f'_1+[(z-c)(Y-y)-(y-b)(Z-z)]f'_2=0$.

显然,当$(X,Y,Z)=(a,b,c)$时,上式左边 $=0$. 故

曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的切平面通过定点(a,b,c).

【例 8.17】 设 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,证明 $u(x,y)=f(x)g(y)$ 的充要条件:

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(u\neq 0).$$

【证】 必要性. 设 $u(x,y)=f(x)g(y)$,则

$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x)g(y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f(x)g'(y),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)$,

于是,$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f(x)g(y)f'(x)g'(y)=[f'(x)g(y)][f(x)g'(y)]=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$.

充分性. 令$\frac{\partial u}{\partial y}=v$,则由 $u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$,有

$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$

$$\Rightarrow u\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow\frac{u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2}=0,\quad 即\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{u}\right)=0.$$

$$\overset{积分}{\Rightarrow}\quad\frac{v}{u}=\varphi(y),\quad 即\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u}=\varphi(y),\quad 亦即\frac{\partial(\ln u)}{\partial y}=\varphi(y),$$

$$\overset{积分}{\Rightarrow}\quad\ln u=\int\varphi(y)\mathrm{d}y+\psi(x)\Rightarrow u=\mathrm{e}^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y+\psi(x)}=\mathrm{e}^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}\cdot\mathrm{e}^{\psi(x)}.$$

$$\xrightarrow{令 f(x)=\mathrm{e}^{\psi(x)},g(y)=\mathrm{e}^{\int\varphi(y)\mathrm{d}y}}u(x,y)=f(x)g(y).$$

【例 8.18】 若两曲面在交线上各点处的法线互相垂直，则称两曲面是正交的. 试证：两曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 在其交点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处正交的充要条件是：

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P\cdot\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_P+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P\cdot\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_P+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P\cdot\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_P=0.$$

【证】 曲面 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点处的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\left\{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P,\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P,\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P\right\},\qquad \boldsymbol{n}_2=\left\{\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_P,\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_P,\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_P\right\},$$

因为 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处正交，故有

$$\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0,$$

即 $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_P\cdot\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_P+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_P\cdot\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_P+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_P\cdot\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_P=0$，故命题得证.

【例 8.19】 证明方程 $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 的解为 $u=f(x^2-y^2)$，其中 f 为任一可微函数.

【证】 令 $\xi=x^2-y^2,\eta=xy$，则 $u=u(x,y)$ 是以 ξ,η 为中间变量，x,y 为自变量的函数.

于是

$$0=y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=y\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+x\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)$$

$$=2xy\frac{\partial u}{\partial\xi}+y^2\frac{\partial u}{\partial\eta}-2xy\frac{\partial u}{\partial\xi}+x^2\frac{\partial u}{\partial\eta}=(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

即 $(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\ \Rightarrow\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\ \xrightarrow{对\ \eta\ 积分}\ u=f(\xi)$，

即 $u=f(x^2-y^2)$，　命题得证.

题型 Ⅶ　多元函数的极值

【解题提示】 重点是条件极值，设 $f(x,y,z)$ 为目标函数，$\varphi(x,y,z)=0$ 为约束条件，则 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的极值的求解程序：

(1) 作拉格朗日函数 $F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$；

(2) 解方程组 $\begin{cases}F'_x=f'_x(x,y,z)+\lambda\varphi'_x(x,y,z)=0\\F'_y=f'_y(x,y,z)+\lambda\varphi'_y(x,y,z)=0\\F'_z=f'_z(x,y,z)+\lambda\varphi'_z(x,y,z)=0\\\varphi(x,y,z)=0\end{cases}$

求出驻点 (x_0,y_0,z_0)，若所求为实际问题极值，则 $u=f(x_0,y_0,z_0)$ 就是所要求的最值.

【例 8.20】 在平面 $x+y+z=1$ 上求一点，使它与两定点 $P(1,0,1),Q(2,0,1)$ 的距离平

方和为最小.

【解】 设所求点为 $M(x,y,z)$，则 $\overline{MP}^2+\overline{MQ}^2$ 为

$$d^2=(x-1)^2+y^2+(z-1)^2+(x-2)^2+y^2+(z-1)^2$$
$$=(x-1)^2+(x-2)^2+2y^2+2(z-1)^2.$$

设拉格朗日函数 $F(x,y,z)=(x-1)^2+(x-2)^2+2y^2+2(z-1)^2+\lambda(x+y+z-1)$，

$$解方程组\begin{cases}F'_x=2(x-1)+2(x-2)+\lambda=0\\F'_y=4y+\lambda=0\\F'_z=4(z-1)+\lambda=0\\x+y+z=1\end{cases}\Rightarrow 得驻点\left(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

故 $\min d^2=\left[(x-1)^2+(x-2)^2+2y^2+2(z-1)^2\right]\Big|_{(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=2.$

【例 8.21】 当 $x>0,y>0,z>0$ 时，求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值. 并证明对任意的正实数 a,b,c 成立不等式

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

【解】 令 $F(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2)$，

解方程组

$$\begin{cases}F'_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0 & ①\\F'_y=\dfrac{2}{y}+2\lambda y=0, & ②\\F'_z=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0 & ③\\x^2+y^2+z^2-6r^2=0 & ④\end{cases}$$

由 ①，② 及 ①，③ 分别得　$y^2=2x^2$，　$z^2=3x^2$，

将它们代入 ④，得 $x=r,y=\sqrt{2}r,z=\sqrt{3}r$，即驻点 $(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)$，

$\max u=\ln r+2\ln(\sqrt{2}r)+3\ln(\sqrt{3}r)=\ln(6\sqrt{3}r^6)$，

即　$\ln x+2\ln y+3\ln z\leqslant\ln(6\sqrt{3}r^6)$，

亦即　$xy^2z^3\leqslant 6\sqrt{3}r^6\ \Rightarrow\ x^2y^4z^6\leqslant(6\sqrt{3})^2\cdot(r^2)^6$

$$\Rightarrow\ x^2y^4z^6\leqslant 108\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^6.$$

令　$x^2=a,y^2=b,z^2=c$，于是　$ab^2c^3\leqslant 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$.

【例 8.22】 设一矩形的周长为 2，现让它绕其一边旋转，求所得圆柱体体积为最大时矩形的面积及圆柱体体积.

【解】 设矩形的两边分别为 x,y，由题设 $x+y=1$. 不妨设矩形绕长度为 y 的一边旋转，则圆柱体体积为 $V=\pi x^2y$. 作拉氏函数 $F(x,y)=\pi x^2y+\lambda(x+y-1)$，

$$解方程组\begin{cases}F'_x=2\pi xy+\lambda=0\\F'_y=\pi x^2+\lambda=0,\\x+y=1\end{cases}\quad 得驻点\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$\max V=\pi\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}\pi$，对应的矩形面积为 $\dfrac{2}{9}$.

题型Ⅷ　杂例

【例 8.23】 设 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，$f(1)=0$，$f'(1)=1$，且二元函数 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，求 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

【解】 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $z=r^2f(r^2)$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=[2rf(r^2)+2r^3f'(r^2)]\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=x[2f(r^2)+2r^2f'(r^2)],$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=[2f(r^2)+2r^2f'(r^2)]+x[4f'(r^2)r+4rf'(r^2)+4r^3f''(r^2)]\frac{x}{r}\\&=[2f(r^2)+2r^2f'(r^2)]+[8f'(r^2)+4r^2f''(r^2)]x^2\\&=2f(r^2)+2f'(r^2)(r^2+4x^2)+4x^2r^2f''(r^2),\end{aligned}\qquad ①$$

由对称性，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f(r^2)+2f'(r^2)(r^2+4y^2)+4y^2r^2f''(r^2)$，　②

将 ①，② 代入原方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得

$r^4f''(r^2)+3r^2f'(r^2)+f(r^2)=0$，

令 $r^2=s$，则上面方程变为 $s^2f''(s)+3sf'(s)+f(s)=0$，

这是欧拉方程，令 $s=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln s$.

欧拉方程 $\Rightarrow[D(D-1)+3D+1]f(\mathrm{e}^t)=0$

$\Rightarrow\quad(D^2+2D+1)f(\mathrm{e}^t)=0$

$\Rightarrow\quad f(\mathrm{e}^t)=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{-t}$（其中 C_1,C_2 为任意常数）

$\Rightarrow\quad f(t)=(C_1+C_2\ln t)/t$

$f'(t)=\dfrac{C_2-(C_1+C_2\ln t)}{t^2}$，　将 $f(1)=0,f'(1)=1$ 代入，得

$C_1=0,C_2=1$，故 $f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，$f'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$.

令 $f'(t)=0\quad\Rightarrow\quad t=\mathrm{e}$，

$f''(t)=\dfrac{-3+2\ln t}{t^3}$，$f''(\mathrm{e})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}<0$，

故 $t=\mathrm{e}$ 时，$f(t)$ 取得最大值 $f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【例 8.24】 设 $u=f(r)$，$r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$，求 $f(x)$.

【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\cdot\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+f'(r)\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{(x^2+y^2+z)^2}+f'(r)\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

由于 x,y,z 的对称性，可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+f'(r)\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

故$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{f''(r)+f'(r)}{x^2+y^2+z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow\quad f''(r)+f'(r)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-r}$（因为 $r=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$），

特征方程：$\lambda^2+\lambda=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=0,\lambda_2=-1$，

非齐次方程的一个特解 $f^*(r)=\dfrac{1}{D^2+D}\mathrm{e}^{-r}=r\cdot\dfrac{1}{2D+1}\mathrm{e}^{-r}=-r\mathrm{e}^{-r}$，

故 $f(r)=C_1+C_2\mathrm{e}^{-r}-r\mathrm{e}^{-r}$，

$f(x)=C_1+C_2\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}$，其中 C_1、C_2 为任意常数.

【例 8.25】 设曲面 $z=f(x,y)$ 二次可微，且$\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$，证明：对任给的常数 C，$f(x,y)=C$ 为一条直线的充要条件是$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

【证】 必要性. 若 $f(x,y)=C$ 表示一条直线，则 $f(x,y)$ 一定是关于 x,y 的一次式，必有 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0$，其中$\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$.　①

又因为 $f(x,y)=C$，所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{f'_x}{f'_y}$，　②

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\left(f''^2_x+f''_{xy}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f'_y-f'_x\left(f''_{yx}+f''^2_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{(f'_y)^2},\quad ③$$

由 ①，②，③ 得　$f''^2_x(f'_y)^2-2f'_xf'_yf''_{xy}+f''^2_y(f'_x)^2=0$.　④

充分性. 由 ③，④ 可知　$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=0$，

因而 $f(x,y)=C$ 必是关于 x,y 的一次式，即 $f(x,y)=C$ 表示一条直线.

【例 8.26】 设对任意的 x 和 y，有$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，用变量代换$\begin{cases}x=uv\\ y=\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)\end{cases}$，将 $f(x,y)$ 变换成 $g(u,v)$，试求满足 $a\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$ 的常数 a 和 b.

【解】 由条件，得 $g(u,v)=f\left[uv,\dfrac{1}{2}(u^2-v^2)\right]$，

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}=v\frac{\partial f}{\partial x}+u\frac{\partial f}{\partial y},\quad ①$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}=u\frac{\partial f}{\partial x}-v\frac{\partial f}{\partial y},\quad ②$$

将 ①，② 代入题设中的关系式，得$a\left(v\dfrac{\partial f}{\partial x}+u\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-b\left(u\dfrac{\partial f}{\partial x}-v\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=u^2+v^2$.

$\Rightarrow\quad (av^2-bu^2)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+(2a+2b)uv\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+(au^2-bv^2)\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=u^2+v^2$，

$\Rightarrow\quad 2a+2b=0\ \Rightarrow\ a=-b$，

于是 $a(u^2+v^2)\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=u^2+v^2$，　又$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，

$\Rightarrow\quad 4a(u^2+v^2)=u^2+v^2\ \Rightarrow\ a=\dfrac{1}{4}$，从而 $b=-\dfrac{1}{4}$.

第九章　重积分

题型Ⅰ　关于二重积分概念及其性质的命题

【解题提示】　仅当积分域 D 关于 x(或 y 的)对称性与被积函数 $f(x,y)$ 关于 y(或 x)的奇、偶性两者兼得时,才能用《复习指南》中的性质 8 简化做题.

【例 9.1】　估计积分 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值,则正确的是　【　】

(A) $\dfrac{1}{2}<I<1.04$.　　(B) $1.04<I<1.96$.

(C) $1.96<I<2$.　　(D) $2\leqslant I<2.14$.

【解】　由题设可知,积分域 D 的面积为 200,由二重积分的中值定理有

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},$$

又　$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$.　故　$\dfrac{200}{102}<I<\dfrac{200}{100}$,　即　$1.96<I<2$,　故(C) 入选.

【例 9.2】　设积分域 D 是以原点为中心,半径为 r 的圆域,则 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$　【　】

(A) πr^2.　　(B) 1.　　(C) $\dfrac{1}{\pi r^2}$.　　(D) 0.

【解】　由二重积分的中值定理可知,D 内 $\exists(\xi,\eta)$,

使　$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi r^2$,

于是　原式 $=\lim\limits_{r\to 0}\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1$,　故(B) 入选.

【例 9.3】　计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2-2\sin x+3y+4)\mathrm{d}\sigma$.

【解】　积分域是 $x^2+y^2\leqslant a^2$,显然关于 x 轴,y 轴,原点对称,于是

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(-2\sin x+3y)\mathrm{d}\sigma=0,$$

又　$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^2\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}y^2\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho=\dfrac{\pi}{4}a^4$,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}4\mathrm{d}\sigma=4\pi a^2,$$

故　$I=\dfrac{\pi}{4}a^4+4\pi a^2$.

【例 9.4】　证明不等式 $1\leqslant\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)\mathrm{d}\sigma\leqslant\sqrt{2}$,其中 D 是正方形域:$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$.

【解】　因为积分域 D 关于直线 $y=x$ 对称，

所以 $\iint\limits_D \cos y^2 \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \cos x^2 \mathrm{d}\sigma$，

于是 $\iint\limits_D (\cos y^2 + \sin x^2)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D (\cos x^2 + \sin x^2)\mathrm{d}\sigma$，

又　$\cos x^2 + \sin x^2 = \sqrt{2}\sin\left(x^2 + \dfrac{\pi}{4}\right)$，而 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$，

故　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sin\left(x^2 + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{2}\sin\left(x^2 + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2}$

$\Rightarrow 1 = \iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (\cos y^2 + \sin x^2)\mathrm{d}\sigma \leqslant \sqrt{2}\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}$.

【例 9.5】　计算 $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}} - 1\right)\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 1 \end{cases}$.

【解】　$f(x,y) = \left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}} - 1\right)\mathrm{e}^{y^2} = \varphi(x)\mathrm{e}^{y^2}$，其中 $\varphi(x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{x}} - 1$，

因为 $\varphi(-x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}} - 1$，　$\varphi(x) + \varphi(-x) = \left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}} - 1\right) + \left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{x}} - 1\right) = 0$，

所以 $\varphi(x)$ 为奇函数.

故 $f(x,y) = \left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}} - 1\right)\mathrm{e}^{y^2}$ 关于 x 为奇函数，又积分域 D：$\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 1 \end{cases}$ 关于 y 轴对称. 由二重积分的性质，有 $I = \iint\limits_D \left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}} - 1\right)\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.

【例 9.6】　设 D 是由 $y = x^3$，$y = 1$，$x = -1$ 所围成的区域(图 9.1)，$f(u)$ 为连续函数. 计算

$$I = \iint\limits_D x[1 + yf(x^2 + y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【解】　因为 $f(u)$ 连续，所以 $F(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ 存在.

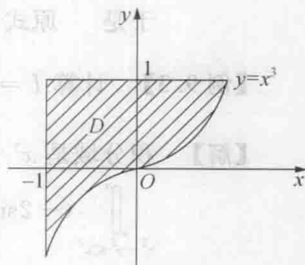


图 9.1

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 \mathrm{d}y + \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 yf(x^2+y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 x(1-x^3)\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 \frac{1}{2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}(x^2+y^2) \\ &= -2\int_0^1 x^4\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 xF(x^2+y^2)\Big|_{x^3}^1 \mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\int_{-1}^1 x[F(x^2+1) - F(x^2+x^6)]\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

因为 $F(x^2+1) - F(x^2+x^6)$ 为 x 的偶函数，

所以 $x[F(x^2+1) - F(x^2+x^6)]$ 为 x 的奇函数. 故后一积分为 0，所以 $I = -\dfrac{2}{5}$.

题型Ⅱ　更换积分次序

【解题提示】　解题程序：(1) 由所给的累次积分的上下限写出表示积分域 D 的不等式组；(2) 画出积分域 D 的草图；(3) 根据定限口诀写出新累次积分的上下限.

【例 9.7】　更换 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序.

【解】　$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\pi\\0\leqslant y\leqslant \sin x\end{cases}$，$D=D_1\cup D_2$（图 9.2），

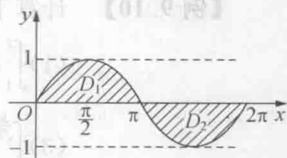


图 9.2

$D_1:\begin{cases}\arcsin y\leqslant x\leqslant \pi-\arcsin y\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$，

$D_2:\begin{cases}\pi-\arcsin y\leqslant x\leqslant 2\pi+\arcsin y\\-1\leqslant y\leqslant 0\end{cases}$

故 $I=\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【例 9.8】　更换 $I=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{\frac{2+x}{2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{2-x}{2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序.

【解】　如图 9.3 所示，两个累次积分的积分域分别为

$D_1:\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 0\\\frac{2+x}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\end{cases}$，$D_2:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\\frac{2-x}{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\end{cases}$，

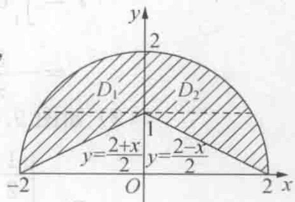


图 9.3

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{2(y-1)}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2(1-y)}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

【例 9.8】　计算 $I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x,(b>a>0)$.

【解】　$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x$

$=\int_a^b\frac{x^{y+1}}{1+y}\Big|_0^1\mathrm{d}y$

$=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln(1+y)\Big|_a^b=\ln(1+b)-\ln(1+a)$.

【例 9.9】　计算 $I=\int_1^3\mathrm{d}x\int_{x-1}^2 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$.

【解】　如图 9.4 所示，$D:\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\x-1\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$，

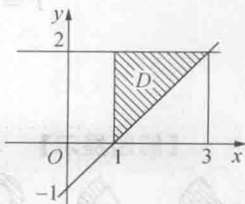


图 9.4

$I=\int_0^2\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y\int_1^{y+1}\mathrm{d}x=\int_0^2 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^4-1)$.

题型Ⅲ　选择积分次序

【解题提示】 凡遇如此形式积分：$\int \frac{\sin x}{x}dx$，$\int \sin\frac{1}{x}dx$，$\int \sin x^2 dx$，$\int \cos x^2 dx$，$\int e^{-x^2}dx$，$\int e^{x^2}dx$，$\int e^{\frac{1}{x}}dx$，$\int \frac{1}{\ln x}dx$ 等，一定要后积分.

【例 9.10】 计算下列二重积分：

(1) $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$；(2) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$；

(3) $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}e^{-y^2}dy\int_0^{y}e^{-x^2}dx+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}e^{-y^2}dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}e^{-x^2}dx$.

【解】 (1) 如图 9.5 所示，第一个积分对应的积分域

$$D_1:\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ \sqrt{x}\leqslant y\leqslant x\end{cases},$$

第二个积分对应的积分域 $D_2:\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4\\ \sqrt{x}\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$，

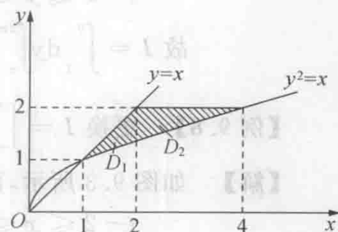


图 9.5

$$I=\int_1^2 dy\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}dx$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\left(\cos\frac{\pi}{2}y-\cos\frac{\pi}{2}\right)dy=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi).$$

(2) 如图 9.6 所示，第一、第二个积分域分别为

$$D_1:\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\\ \frac{1}{4}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\\ \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\end{cases},$$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}xe^{\frac{y}{x}}\Big|_{x^2}^{x}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(e-e^x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}e-e^{\frac{1}{2}}\right).$$

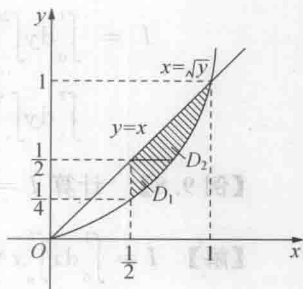


图 9.6

(3) 如图 9.7 所示，第一、二个积分的积分域分别为

$$D_1:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant y\\ 0\leqslant y\leqslant\frac{R}{\sqrt{2}}\end{cases},\quad D_2:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{R^2-y^2}\\ \frac{R}{\sqrt{2}}\leqslant y\leqslant R\end{cases},$$

$$I=\iint\limits_{D_1+D_2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{8}(1-e^{-R^2}).$$

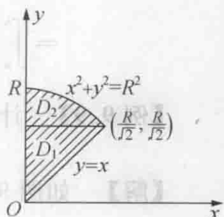
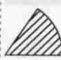
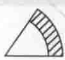


图 9.7

题型Ⅳ　选择坐标系

【解题提示】 二重积分的计算选何种坐标系主要是依据积分域 D 的形状. 当积分域 D 为


扇域

环扇域

环域

圆域

时，选择极坐标系. 注意极坐标系的面积元素为 $d\sigma=\rho d\rho d\theta$.

【例 9.11】 计算下列积分：

(1) $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}\sigma$，$D$ 为 $\sqrt{2x - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2}$ 所确定区域.

(2) 求由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所包围的且在柱面内部的体积.

(3) $I = \iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x = 0$，$y = 0$ 及 $x + y = 1$ 所围成的平面区域.

【解】 (1) 用极坐标系做简单(图 9.8).

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^{2} \rho^2 \cdot \rho \mathrm{d}\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{4}\pi.$$

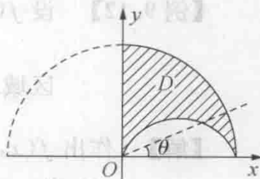


图 9.8

(2) 如图 9.9 所示，由于所求体积的形体关于 xOy 坐标面对称. 所以所求体积

$$V = 2\iint\limits_{D_{xy}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2a\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{16}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [|\sin^3\theta| - 1]\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{16}{3}a^3 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta - 1)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{16}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

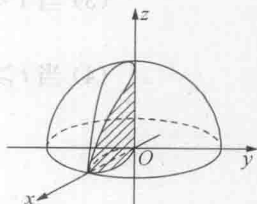


图 9.9

(3) 积分区域如图 9.10 所示，因为积分 $\int \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x$ 与 $\int \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}y$ 都不能用有限形式表示出来，所以在直角坐标系下积分无法计算，但注意到 $\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x/y}} = f\left(\frac{x}{y}\right)$，因此所求积分在极坐标系下有可能积出来.

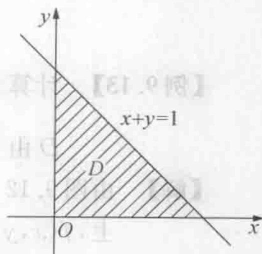


图 9.10

直线 $x + y = 1$ 的极坐标方程为 $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$，$x$ 轴，y 轴分别为 $\theta = 0$，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$. 于是 D 的极坐标表达式为

$$D:\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}\right\},$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} \mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}} \cdot \rho\mathrm{d}\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}} \frac{1}{2}\rho^2 \Big|_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}} \mathrm{d}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1).$$

题型Ⅴ　分段函数的积分

【解题提示】 被积函数为分段函数的重积分一般是将被积函数及积分域的图形先画出来，然后根据几何图形的性质加以讨论.

被积函数含有绝对值符号的重积分，实际上也是属于分段函数的重积分，运算前要先去掉绝对值号，然后进行分域研究.

【例 9.12】 设 $f(x,y)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\\0,\text{其他}\end{cases}$，$D$ 是由 $x=0,y=0$ 及 $x+y\leqslant t$ 所围区域. 计算 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】 作出 $f(x,y)$ 及 D 之图形，如图 9.11 所示.

(1) 当 $t<0$ 时，$f(x,y)=0$，所以 $F(t)=0$；

(2) 当 $0\leqslant t<1$ 时，$f(x,y)=1$，所以 $F(t)=\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{t^2}{2}$；

(3) 当 $1<t<2$ 时，$f(x,y)=1$，$F(t)=\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\dfrac{1}{2}(2-t)^2$；

(4) 当 $t\geqslant 2$ 时，$f(x,y)=1$，　$F(t)=\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；

$$\text{故 } F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t<1\\ 1-\dfrac{1}{2}(2-t)^2, & 1\leqslant t<2\\ 1, & t\geqslant 2\end{cases}.$$

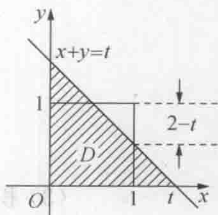


图 9.11

【例 9.13】 计算 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0\\0, & \text{其他}\end{cases}$，$D$ 由 $x+y=a$，$x+y=b$，$y=0$ 和 $y=b+a$ 所围成($b>a>0$).

【解】 由图 9.12 及 $f(x,y)$ 的表达式可知，$D=D_1\cup D_2\cup D_3$，在 D_1 上，$f(x,y)=0$.

于是 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$，

因而
$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_3}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^a\mathrm{d}x\int_{a-x}^{b-x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y+\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{b-x}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y\\&=a\mathrm{e}^{-a}-b\mathrm{e}^{-b}+\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-b}.\end{aligned}$$

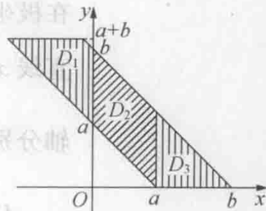


图 9.12

【例 9.14】 求下列二重积分：

(1) $I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2) $I=\iint\limits_D\big||x|-|y|\big|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\sigma$，$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\|y|\leqslant 1\end{cases}$.

【解】 (1) 如图 9.13 所示，积分域 $D=\{(x,y): |x|+|y|\leqslant 1\}$，被 x,y 轴分成相等的四个区域，记第一象限的子域为 D_1，由于被积函数 $|xy|$ 的对称性，

所以 $I=4\iint\limits_{D_1}|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y\mathrm{d}y$

$$=4\int_0^1 x\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.$$

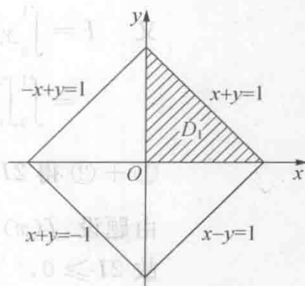


图 9.13

(2) 积分域 D 如图 9.14 所示，$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$ 关于 x 轴对称，令 $x-|y|=0\Rightarrow x=|y|\Rightarrow y=\pm x$，

故 $I=2\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x}\,\mathrm{d}\sigma+2\iint\limits_{D_2}\sqrt{x-y}\,\mathrm{d}\sigma$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y-x}\,\mathrm{d}x+2\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^2\sqrt{x-y}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1\left[-\frac{2}{3}(y-x)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^y\mathrm{d}y+2\int_0^1\left[\frac{2}{3}(x-y)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_y^2\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y+2\int_0^1\frac{2}{3}(2-y)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{8}{15}y^{\frac{5}{2}}\Big|_2^1-\frac{8}{15}(2-y)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1=\frac{32\sqrt{2}}{15}.$$

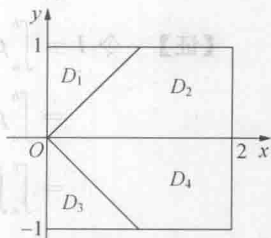


图 9.14

题型Ⅵ　涉及二次累次积分不等式的证明

【解题提示】 方法有二：① 辅助函数法，见定积分不等式的证明；② 化为二重积分证明．尤其是题设条件中告知被积函数严格单调增加(或减小)而没有说明可导的命题，其证明是从差式出发进行推导．

设函数 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的单调减少且恒大于零的连续函数，证明：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

【分析】 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减少且 $f(x)>0$．

所以 $\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\dfrac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}\Leftrightarrow\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\cdot$

$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$

【证】 令 $I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f^2(y)\mathrm{d}y-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 yf^2(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f^2(y)f(x)(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad①$$

又　$I=\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\int_0^1 f(y)f^2(x)(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad ②$$

① + ② 得 $2I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(x-y)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

由题设,$f(x)>0$ 且在$[0,1]$上单减,所以当 $y\geqslant x$ 时,$f(y)\leqslant f(x)$.

故 $2I\geqslant 0$,　即 $I\geqslant 0$ 命题得证.

【例 9.16】 设 $p(x),f(x),g(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数,且在$[a,b]$上,$p(x)>0,f(x)$,$g(x)$ 为单调递增,试证:

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 令 $I=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(y)f(y)g(y)\mathrm{d}y-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)g(y)[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad ①$$

同理　$I=\int_a^b p(y)\mathrm{d}y\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(y)f(y)\mathrm{d}y\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_a^b\int_a^b p(y)p(x)g(x)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad ②$$

① + ②,得　$2I=\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(y)-f(x)][g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

由于 $p(x),p(y)>0,[f(y)-f(x)][g(y)-g(x)]\geqslant 0$　(因为 $f(x),g(y)$ 同为增)

故 $2I\geqslant 0$.　即 $I\geqslant 0$,命题得证.

题型 Ⅶ* 三重积分的计算

【解题提示】 计算三重积分时不要急于求成,而应按如下步骤处理:

设 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V,\Omega:a\leqslant x\leqslant b,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),z_1(x,y)\leqslant z(x,y)\leqslant z_2(x,y)$,

则 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

其中 D_{xy} 为 Ω 在 xOy 平面上的投影,在 D_{xy} 内任取一点作平行于 z 轴的直线,该直线与围成 Ω 的边界曲面相交,则先交者作为 z 的积分下限,后交者为上限. 类似地也可考虑先对 x 或 y 积分的情形.

对柱坐标系:$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V,\Omega:\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,z_1(x,y)\leqslant z(x,y)\leqslant z_2(x,y)$,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

三重积分计算的繁简取决于坐标系的选择，坐标系的选择主要取决于积分域Ω的形状.当积分域Ω的形状是柱体、锥体或由柱面、锥面、旋转面与其他曲面所围成的形体时，宜用柱面坐标系；当积分域Ω的形状是球体或球体的一部分、锥体时，宜用球面坐标系；当积分域Ω的形状为长方体、四面体或任意形体时，用直角坐标系.

A. 利用直角坐标系计算

【例 9.17】 计算下列三重积分：

(1) $I=\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为$y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$所围区域.

(2) $I=\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$由抛物柱面$y=\sqrt{x}$，平面$y=0$，$z=0$及$x+z=\dfrac{\pi}{2}$所围成的区域.

【解】 (1) 如图 9.15 所示.

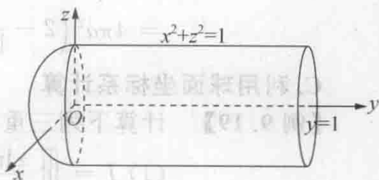


图 9.15

$$\iiint\limits_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iint\limits_{D_{xz}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1} y\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x^2+z^2}{2}\mathrm{d}z$$
$$=\int_{-1}^{1}(-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3})\mathrm{d}x=\frac{28}{45}.$$

(2) $I=\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)\mathrm{d}z$

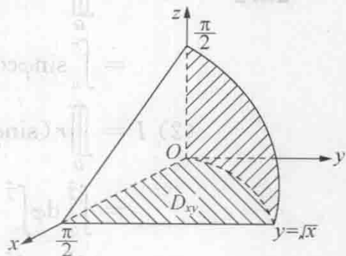


图 9.16

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(z+x)\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{\sqrt{x}}\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}-(\sin x-x\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2-8}{16}.$$

B. 利用柱坐标系计算

【例 9.18】 计算下列三重积分：

(1) $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V$，$\Omega$为由$x^2+y^2\leqslant z^2$，$0\leqslant z\leqslant h$所围形体；

(2) $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}z=a^y\\x=0\end{cases}$ $(0\leqslant y\leqslant z,a>0,a\neq 1)$ 绕 z 轴旋转一周所成的曲面与平面 $z=a^2$ 所围成的形体.

【解】 (1) 由于 Ω 关于 yOz 坐标面，xOz 坐标面均对称，故 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}V=0$，于是

$$I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h}z\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{h}z\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^h\rho(h^2-\rho^2)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\rho=\pi\int_0^h(h^2\rho-\rho^3)\mathrm{d}\rho=\frac{1}{4}\pi h^4.$$

(2) 旋转面方程：$z=a^{\sqrt{x^2+y^2}}$，$(x^2+y^2\leqslant 4)$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\int_{a^{\rho}}^{a^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2\rho^3(a^2-a^{\rho})\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[a^2\cdot\frac{1}{4}\rho^4-\frac{a^{\rho}}{\ln a}\cdot\rho^3+\frac{a^{\rho}}{\ln^2 a}\cdot 3\rho^2-\frac{a^{\rho}}{\ln^3 a}\cdot 6\rho+\frac{a^{\rho}}{\ln^4 a}\cdot 6\right]\Bigg|_0^2$$

$$=4\pi a^2\left(2-\frac{4}{\ln a}+\frac{6}{\ln^2 a}-\frac{6}{\ln^3 a}+\frac{3}{\ln^4 a}\right)-\frac{12\pi}{\ln^4 a}.$$

C. 利用球面坐标系计算

【例 9.19】 计算下列三重积分：

(1) $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}V$，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

(2) $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}V$，其中 Ω 为 $1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$.

(3) $I=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}V$. 其中 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

【解】 (1) $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{r\cos\varphi\ln(1+r^2)}{1+r^2}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^3\ln(1+r^2)}{1+r^2}\mathrm{d}r=0\quad\left(\text{因为}\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=0\right).$$

(2) $I=\iiint\limits_{\Omega}r(\sin\varphi\cos\theta+\cos\varphi)\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3(\sin^2\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\varphi)\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\varphi)\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r,$$

因为 $\int_1^2 r^3\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_1^2 r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}(r^2)=\frac{1}{2}\int_1^4 u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2\mathrm{e}^4}(2\mathrm{e}^3-5)$，

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\varphi\cos\theta+\cos\varphi\sin\varphi)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2\varphi+\frac{\pi}{2}\cos\varphi\sin\varphi\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}$，

所以 $I=\frac{\pi}{4\mathrm{e}^4}(2\mathrm{e}^3-5)$.

(3) 由对称性，有

$$I=2\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\(z\geqslant 0)}}\mathrm{e}^z\mathrm{d}V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{e}^{r\cos\varphi}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^1 r^2 \sin\varphi e^{r\cos\varphi} dr = 4\pi\int_0^1 r^2 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi e^{r\cos\varphi} d\varphi$$

$$= -4\pi\int_0^1 r dr \cdot e^{r\cos\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi\int_0^1 r(e^r - 1) dr = 2\pi.$$

【例 9.20】 计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$，其中 Ω 为球域 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$，被积函数为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 0, & 当 z \geqslant \sqrt{x^2+y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2}, & 当 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}. \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}, & 当 z \leqslant 0 \end{cases}$$

【解】 由于被积函数是分段函数，因此必须将积分域分成相应的几个子域，然后再计算．由被积函数的表达式及积分域的特点选极坐标系做方便．于是

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3 \sin^2\varphi dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3 \sin\varphi dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi d\varphi + \frac{\pi}{2}(-\cos\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{5}{8}\pi + \frac{1}{16}\pi^2.$$

题型 Ⅷ　杂例

【例 9.21】 设函数 $f(x)$ 连续，$f(0) = 1$，令 $F(t) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant t^2} f(x^2+y^2)dxdy (t \geqslant 0)$，求 $F''(0)$．

【解】 从积分域 $x^2+y^2 \leqslant t^2$ 及被积函数 $f(x^2+y^2)$ 的形式可知极坐标计算方便．

$$F(t) = \iint\limits_{\rho \leqslant t} f(\rho^2)\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho d\rho = 2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho d\rho,$$

因为 $F'(t) = 2\pi t f(t^2)$，所以 $F'(0) = 0$，

由于只告知 $f(x)$ 连续，没有告知 $f(x)$ 可导，所以求 $F''(0)$ 时，只能用二阶导数的定义求，故

$$F''(0) = \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ (因为 t \geqslant 0)}} \frac{F'(t) - F'(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{2\pi t f(t^2)}{t} = \lim_{t \to 0^+} 2\pi f(t^2)$$

$$= 2\pi f(0) = 2\pi (因为 f(0) = 1).$$

【例 9.22】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且满足

$$f(t) = 2\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant t^2} (x^2+y^2) f(\sqrt{x^2+y^2}) dxdy + t^4，求 f(x).$$

【解】 从积分域及被积函数的形式可看出用极坐标系计算方便．

$$f(t) = 2\iint\limits_{\rho \leqslant t} \rho^2 f(\rho)\rho d\rho d\theta + t^4 = 2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^t \rho^3 f(\rho) d\rho + t^4 = 4\pi\int_0^t \rho^3 f(\rho) d\rho + t^4,$$

等式两边求导，$f'(t) = 4\pi t^3 f(t) + 4t^3 = 4t^3[\pi f(t) + 1]$，

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(t)}{\pi f(t) + 1} = 4t^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi}\ln[\pi f(t) + 1] = t^4 + C,$$

又由给定的式子可知 $f(0) = 0$，代入上式，得 $C = 0$，

$$\Rightarrow \quad \ln[\pi f(t) + 1] = \pi t^4 \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{\pi}(e^{\pi t^4} - 1).$$

【例 9.23】 设 $f(x,y)$ 在区域 $D: 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 上有定义 $f(0,0) = 0$，且在 $(0,0)$

处 $f(x,y)$ 可微，求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}$.

【解】 因为 $\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u$ 中的上限及被积函数 $\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u$ 均含有变量 x，若用洛必达法则，分子对 x 的导数不好求，所以必须更换分子中的累次积分的次序. 即

$$\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u=-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t,$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}$$

$$\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{由积分}}-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2f(\xi,x)}{x^3}=-\lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi,x)}{x},\quad \text{其中 } 0\leqslant\xi\leqslant x^2.$$

又因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微且 $f(0,0)=0$ 及 $0\leqslant\xi\leqslant x^2$，

所以 $f(\xi,x)=f(0,0)+f'_x(0,0)\xi+f'_y(0,0)x+o(\sqrt{\xi^2+x^2})=f'_y(0,0)x+o(x)$，

故　　$\text{原式}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'_y(0,0)x+o(x)}{x}=-f'_y(0,0).$

【例 9.24】* 设 $f(u)$ 连续，Ω 由 $0\leqslant z\leqslant h$，$x^2+y^2\leqslant t^2$ 围成. 若 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]\mathrm{d}v$，求 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$，$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{F(t)}{t^2}$.

【解】 由 Ω 的形状及被积函数形式，可知用柱面坐标系为宜.

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V+\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho\mathrm{d}\rho\int_0^h z^2\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho\int_0^h\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}h^3\pi t^2+2\pi h\int_0^t f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho,$$

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}\pi h^3t+2\pi htf(t^2),$$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}\pi h^3t^2+2\pi h\int_0^x f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{2}{3}\pi h^3t+2\pi htf(t^2)}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{3}\pi h^3+\pi hf(t^2)\right]=\frac{1}{3}\pi h^3+\pi hf(0).$$

【例 9.25】 计算 $I=\iint\limits_D\sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi.\end{cases}$

【解】 如图 9.17 所示，$D=D_1\cup D_2$，$D_1=\{(x,y)\in D,y>x\}$，
$D_2=\{(x,y)\in D,x>y\}$，

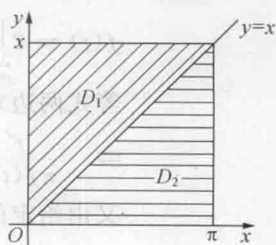


图 9.17

于是　$$I=\iint\limits_{D_1}y\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}x\sin x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^\pi y\sin y\mathrm{d}y\int_0^y\sin x\mathrm{d}x+\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x\int_0^x\sin y\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^\pi y\sin y\mathrm{d}y\int_0^y\sin x\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{2}.$$

第十章* 曲线曲面积分

题型 I 对弧长的曲线积分的计算

【解题提示】 (1) $\int_L f(x,y)\mathrm{d}l$ 的计算是化为路径 L 的参数式的定积分计算. 例如

$L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, 则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

注 上限的参数值大, 下限的小, 即 $\beta\geqslant\alpha$.

(2) 运用对称性简化对弧长的曲线积分计算时, 应同时考虑被积函数 $f(x,y)$ 与积分路径 L 的对称性.

设 $f(x,y)$ 是定义在一条光滑(或分段光滑)的曲线 L 上的连续函数, L 关于 y 轴(或 x 轴)对称. 则

① 当 $f(x,y)$ 是 L 上关于 x(或 y)的奇函数时, $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}l=0$.

② 当 $f(x,y)$ 是 L 上关于 x(或 y)的偶函数时, $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}l=2\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}l$, 其中 L_1 是曲线 L 落在 y(或 x)轴一侧的部分.

(3) 曲线积分可以将曲线 L 的表达式直接代入积分式.

例如: $L: x^2+y^2=a^2$, 计算 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}l=\int_L a^2\mathrm{d}l=2\pi a^3$.

注 这在重积分式中是万万不可的!!

【例 10.1】 计算下列对弧长的曲线积分:

(1) 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$, 计算 $I=\oint_L(x^2+y^3)\mathrm{d}l$;

(2) 设 L 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线, 计算 $I=\int_L x^2\mathrm{d}l$.

【解】 (1) $I=\oint_L x^2\mathrm{d}l+\oint_L y^3\mathrm{d}l$,

由于 L 的对称性, x^2 为偶函数, 所以

$$\oint_L x^2\mathrm{d}l=\oint_L y^2\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}l=\frac{a^2}{2}\oint_L\mathrm{d}l=\frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a=\pi a^3.$$

对于 $\oint_L y^3\mathrm{d}l$, 由于 L 是关于 x 轴对称的, $f(x,y)=y^3$ 是关于 y 的奇函数,

故 $\oint_L y^3\mathrm{d}l=0$.

故 $I=\oint_L(x^2+y^3)\mathrm{d}l=\pi a^3$.

(2) 由于 L 关于 x,y,z 的对称性, 所以

$$\int_L x^2\mathrm{d}l=\int_L y^2\mathrm{d}l=\int_L z^2\mathrm{d}l,$$

故 $I=\int_L x^2\mathrm{d}l=\frac{1}{3}\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}l=\frac{R^2}{3}\int_L\mathrm{d}l$

$=\frac{R^2}{3}\cdot 2\pi R=\frac{2}{3}\pi R^3.$

【例 10.2】 求下列对弧长的曲线积分:

(1) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,其周长记为 a,计算 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}l$;

(2) 设 L 为 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$,试计算 $I=\oint_L\frac{\sqrt[3]{xy}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}l.$

【解】 (1) $I=\oint_L 2xy\mathrm{d}l+\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}l$,

因为 L 关于 y 轴是对称的,被积函数 $2xy$ 是 x 的奇函数,故

$$\oint_L 2xy\mathrm{d}l=0.$$

$$\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}l=12\oint_L\frac{3x^2+4y^2}{12}\mathrm{d}l=12\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}l$$

$$=12\oint_L 1\cdot\mathrm{d}l=12a.\text{ 故 }I=12a.$$

(2) $I=\int_L\frac{\sqrt[3]{xy}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}l\xlongequal{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1}\oint_L\sqrt[3]{xy}\,\mathrm{d}l$,

因为 L 是关于 x 轴对称的,被积函数 $\sqrt[3]{xy}$ 是 y 的奇函数.故积分 $=0$.

题型 Ⅱ　对坐标的曲线积分计算(重点)

【解题提示】 对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的计算方法有如下四种.

(1) 化为路径 L 的参数式的定积分计算,其解题程序为:① 画出路径 L 的草图;② 写出路径 L 的参数方程;③ 将原积分化为参数的定积分计算.注意:起点的参数值作为定积分的下限,终点的参数值作为定积分的上限;上限不一定比下限大.

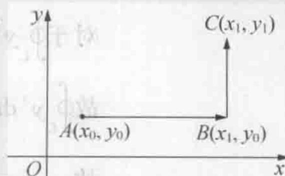
(2) 利用求全微分的原函数进行计算(适用于路径 L 非闭情形).

若 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在区域 D 内(L 位于 D 内)$P(x,y)$,$Q(x,y)$ 具有一阶连续的偏导数,且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,则 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分,即 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,于是

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}\mathrm{d}u(x,y)$$

$$=u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1).$$

(3) 设在区域 D 内 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,则



(i) $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$

(ii) $\int_{L\text{非闭}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{A(x_0,y_0)}^{B(x_1,y_1)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

$$=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y.$$

(4) 利用格林公式(注意利用格林公式的前提是积分曲线一定为闭的) 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在包含 L 于其内的闭域 D 中具有一阶连续的偏导数,L 非闭,$L+L_。$闭合,则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L+L_。}-\int_{L_。}=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L_。}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

(5) 计算空间闭曲线上的曲线积分的一个重要方法是利用斯托克斯公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

【例 10.3】 计算下列曲线积分:

(1) 计算 $I=\int_{L(0,0)}^{(1,2)}(\mathrm{e}^y+3x^2)\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y+2y)\mathrm{d}y$,其中 L 为过 $(0,0),(0,1),(1,2)$ 的圆周;

(2) 计算 $I=\int_{\widehat{AMB}}(\mathrm{e}^x\sin y-ay)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-bx)\mathrm{d}y$,其中 $\widehat{AMB}$ 是过 $A(a,0)$,$M\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)$,$B(b,0)$ 三点的半圆周 $(a>b>0)$(图 10.1).

【解】 (1) $P(x,y)=\mathrm{e}^y+3x^2,Q(x,y)=x\mathrm{e}^y+2y$,

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^y=\frac{\partial Q}{\partial x}$,所以曲线积分与路径无关.

于是,
$$\int_{L(0,0)}^{(1,2)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^1(\mathrm{e}^0+3x^2)\mathrm{d}x+\int_0^2(\mathrm{e}^y+2y)\mathrm{d}y$$
$$=1+x^3\Big|_0^1+(\mathrm{e}^y+y^2)\Big|_0^2=2+(\mathrm{e}^2+4-1)$$
$$=\mathrm{e}^2+5.$$

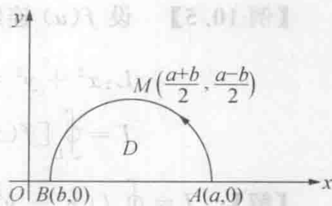


图 10.1

(2) $P=\mathrm{e}^x\sin y-ay,Q=\mathrm{e}^x\cos y-bx$,

$\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-a,\frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y-b$,

$$I=\int_{\widehat{AMB}+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}.$$

$$\oint_{\widehat{AMB}+\overline{BA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(a-b)\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=(a-b)\cdot\frac{1}{2}\pi(\frac{a-b}{2})^2=\frac{1}{8}\pi(a-b)^3,$$

$$\int_{\overline{BA}}=\int_b^a(\mathrm{e}^x\sin0+a\times0)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos0-bx)\mathrm{d}(0)=0.$$

故 $I=\frac{1}{8}\pi(a-b)^3$.

【例 10.4】 计算 $I=\oint_L\left[\frac{-y}{(x-2)^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}y$,$L$ 是由两圆 $x^2+y^2=1$ 与 $(x-2)^2+y^2=1$ 所构成的正向闭路.

【解】 路径如图 10.2 所示.

$$I=\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+(x-2)\mathrm{d}y}{(x-2)^2+y^2}+\oint_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

$$I_1=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+(x-2)\mathrm{d}y}{(x-2)^2+y^2}=\oint_{L_1}+\oint_{L_2},$$

$$I_2=\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L_1}+\oint_{L_2}.$$

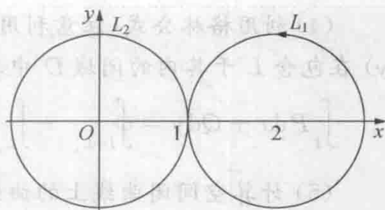


图 10.2

先分析 I_1：

$$P(x,y)=\frac{-y}{(x-2)^2+y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-(x-2)^2}{[(x-2)^2+y^2]^2},$$

$$Q(x,y)=\frac{x-2}{(x-2)^2+y^2},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-(x-2)^2}{[(x-2)^2+y^2]^2},$$

因为在 L_2 所围成的域中 $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以 $\oint_{L_2}=0$，

在 L_1 所围成的域中，$\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 $(2,0)$ 处不相等.

由定理设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在域 D 内有一阶连续的偏导数，且恒有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，$L_1$ 与 L_2 为 D 内任意两条同向闭曲线，且各自所围的区域中有相同的不属于 D 的点，则 $\oint_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

有 $\int_{L_1}\xlongequal[y=\sin t]{x-2=\cos t}\int_{\delta}^{2\pi}\frac{-\sin t(-\sin t)+\cos t\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi$，

故 $I_1=2\pi$，同理有 $I_2=2\pi$，

故 $I=I_1+I_2=4\pi$.

【例 10.5】 设 $f(u)$ 连续，$\varphi'(v)$ 连续，且 $\iint_D(x+y)\varphi'(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$，

$L:x^2+y^2=1$，D 为 L 所围的圆域，计算

$$I=\oint_L[f(x^2+y^2)+\varphi(x-y)](x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).$$

【解】 $I=\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+\oint_L\varphi(x-y)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$，

令 $I_1=\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$，$I_2=\oint_L\varphi(x-y)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$.

(1) 先求 I_1.

设 $x^2+y^2=u$，因 $f(u)$ 连续，所以存在 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，

于是，$F'(u)=f(u)$，即

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}F(u)\right)=\frac{1}{2}F'(u)\mathrm{d}u=f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y),$$

故 $\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=\oint_L\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}F(u)\right)=0$.

(2) 再求 I_2.

$I_2=\oint_L\varphi(x-y)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$，其中 $P=\varphi(x-y)x,Q=\varphi(x-y)y$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x\varphi'(x-y)(-1)=-x\varphi'(x-y),\frac{\partial Q}{\partial x}=y\varphi'(x-y),$$

于是 $I_2 \xlongequal{\text{由格林公式}} \iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D(x+y)\varphi'(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$,

故 $I=I_1+I_2=0+A=A.$

【例 10.6】 计算 $I=\int_L(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$，其中 L 为由点 $A(a,0,0)$ 沿螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\varphi\\ y=a\sin\varphi\\ z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi\end{cases}$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，到 $B(a,0,h)$ 的弧段.

【解】 由参数方程，有 $\mathrm{d}x=-a\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,\mathrm{d}y=a\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,\mathrm{d}z=\frac{h}{2\pi}\mathrm{d}\varphi$，再由三角函数族在 $[0,2\pi]$ 上的正交性，有

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\left(a^2\cos^2\varphi-\frac{ah}{2\pi}\varphi\sin\varphi\right)(-a\sin\varphi)+\left(a^2\sin^2\varphi-\frac{ah}{2\pi}\varphi\cos\varphi\right)a\cos\varphi\right.$$
$$\left.+\left(\frac{h^2}{4\pi^2}\varphi^2-a^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\cdot\frac{h}{2\pi}\right]\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{a^2h}{2\pi}\varphi\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi-\frac{a^2h}{2\pi}\cdot\pi+\int_0^{2\pi}\frac{h^3}{8\pi^3}\varphi^2\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}h^3.$$

【另解】 曲线积分的路径如图 10.3 中的 $\overset{\frown}{AmB}$，添加线段 $\overline{BnA}$，则 $\overset{\frown}{AmBnA}$ 为闭曲线，于是

$$I=\oint_{\overset{\frown}{AmBnA}}-\int_{\overline{BnA}},$$

$$\oint_{\overset{\frown}{AmBnA}}\xlongequal{\text{斯托克斯公式}}\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy\end{vmatrix}=0,$$

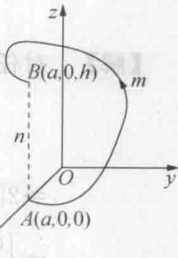


图 10.3

$$\int_{\overline{BnA}}=\int_h^0 z^2\mathrm{d}z=-\frac{1}{3}h^3,$$

故 $I=\oint_{\overset{\frown}{AmBnA}}-\int_{\overline{BnA}}=\frac{1}{3}h^3.$

【例 10.7】 计算 $I=\oint_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，

其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1\end{cases}$，$(a>0,h>0)$，从 x 轴正向看去 L 为逆时针.

【解】 利用路径的参数式 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=h(1-\cos t)\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，

$$I=\int_0^{2\pi}\{[a\sin t-h(1-\cos t)](-a\sin t)+[h(1-\cos t)-a\cos t]\cdot a\cos t+a(\cos t-\sin t)\cdot h\sin t\}\mathrm{d}t$$
$$=-2\pi a(a+h).$$

【另解】 用斯托克斯公式(见图 10.4),有

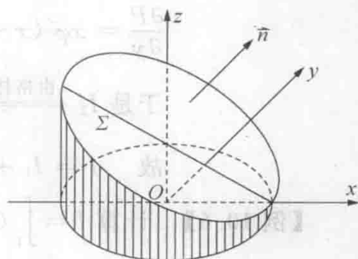


图 10.4

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}=-2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal[\text{曲面积分关系}]{\text{由两种}}-2\iint_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

$$\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}},0,\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right\},$$

所以 $I=-2\iint_{\Sigma}\dfrac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\mathrm{d}S=-\dfrac{2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S.$

$$=-\frac{2(a+h)}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot\pi a\sqrt{a^2+h^2}=-2\pi a(a+h).$$

【例 10.8】 确定可微函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$,使当 $P(x,y)=[x\alpha(x)+\beta(x)]y^2+3x^2y,Q(x,y)=y\alpha(x)+\beta(x)$ 时,曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 对任何闭曲线 L 都等于零,其次写出当 $\alpha(0)=-1,\beta(0)=0$ 时,$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的表达式.

【解】 对任何闭曲线 L 均有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2[x\alpha(x)+\beta(x)]y+3x^2,\frac{\partial Q}{\partial x}=y\alpha'(x)+\beta'(x)$$

$$\Rightarrow 2[x\alpha(x)+\beta(x)]y+3x^2\equiv y\alpha'(x)+\beta'(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha'(x)=2x\alpha(x)+2\beta(x)\\ \beta'(x)=3x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta(x)=x^3+C_1 & ①\\ \alpha'(x)=2x\alpha(x)+2x^3+2C_1. & ②\end{cases}$$

求解一阶线性微分方程 $\alpha'(x)-2x\alpha(x)=2x^3+2C_1$,

先求对应的齐次方程通解 $\alpha'(x)=2x\alpha(x)\Rightarrow\alpha(x)=C\mathrm{e}^{x^2}$,

再用常数变易法求非齐次方程的通解.

令 $\alpha(x)=C(x)\mathrm{e}^{x^2}$,代入非齐次方程中并整理,得

$$C'(x)\mathrm{e}^{x^2}=2x^3+2C_1\Rightarrow C(x)=-\mathrm{e}^{-x^2}(1+x^2)+2C_1\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+C_2,$$

故 $\alpha(x)=\mathrm{e}^{x^2}\left[-\mathrm{e}^{-x^2}(x^2+1)+2C_1\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+C_2\right]=-(x^2+1)+2C_1\mathrm{e}^{x^2}\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+C_2\mathrm{e}^{x^2}$.　③

由 $\beta(0)=0$ 及 ①,可得 $C_1=0$,所以 $\beta(x)=x^3$.

由 $\alpha(0)=-1$ 及 ③,可得 $C_2=0$,所以 $\alpha(x)=-x^2-1$.

故 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_L(-xy^2+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3-x^2y-y)\mathrm{d}y.$

【例 10.9】 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,$

$y)\mathrm{d}y$ 与路径无关,并对任意 t 恒有$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x +$ $Q(x,y)\mathrm{d}y$,求 $Q(x,y)$.

【解】 由曲线积分与路径无关的条件,有

$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$,即$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \Rightarrow Q(x,y) = x^2 + C(y)$,$C(y)$ 待定.

又 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + [x^2 + C(y)]\mathrm{d}y$

$$= \int_0^t 2x \times 0\mathrm{d}x + \int_0^1 [t^2 + C(y)]\mathrm{d}y$$

$$= t^2 + \int_0^1 C(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^t [1^2 + C(y)]\mathrm{d}y = t + \int_0^t C(y)\mathrm{d}y,$$

由题设条件有 $t^2 + \int_0^1 C(y)\mathrm{d}y = t + \int_0^t C(y)\mathrm{d}y$,

两边对 t 求导,得 $2t = 1 + C(t) \Rightarrow C(t) = 2t - 1$,

从而 $C(y) = 2y - 1$,

故 $Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$.

【例 10.10】 设曲线积分$\oint_L 2[x\varphi(y) + \psi(y)]\mathrm{d}x + [x^2\psi(y) + 2xy^2 - 2x\varphi(y)]\mathrm{d}y = 0$,其中 L 为任意一条平面闭曲线. 求:

(1) 可微函数 $\varphi(y)$,$\psi(y)$,已知 $\varphi(0) = -2$,$\psi(0) = 1$.

(2) 沿 L 从原点$(0,0)$到 $M\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$的曲线积分.

【解】 (1) 由题设,曲线积分与路径无关,于是$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$.

即 $2[x\varphi'(y) + \psi'(y)] \equiv 2x\psi(y) + 2y^2 - 2\varphi(y)$,

由于 x,y 的独立性,所以

$$\begin{cases}\varphi'(y) = \psi(y)\\ \psi'(y) = y^2 - \varphi(y)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\varphi''(y) = \psi'(y)\\ \psi'(y) = y^2 - \varphi(y)\end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi''(y) + \varphi(y) = y^2$,解之,

得 $\varphi(y) = C_1\cos y + C_2\sin y + y^2 - 2$,

$\psi(y) = \varphi'(y) = -C_1\sin y + C_2\cos y + 2y$,

将初始条件 $\varphi(0) = -2$,$\psi(0) = 1$ 代入,得出:$\begin{cases}\varphi(y) = \sin y + y^2 - 2\\ \psi(y) = \cos y + 2y\end{cases}$.

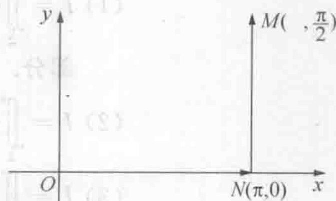


图 10.5

(2) 如图 10.5 所示,因为曲线积分与路径无关,所以

$$\int_{\overline{OM}} 2[x(\sin y + y^2 - 2) + \cos y + 2y]\mathrm{d}x + [x^2(\cos y + 2y) + 2xy^2 - 2x(\sin y + y^2 - 2)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\overline{ON}} + \int_{\overline{NM}} = \int_0^{\pi} (2 - 4x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\pi^2(\cos y + 2y) + 2\pi y^2 + 2\pi(\sin y + y^2 -$$

$2)]\mathrm{d}y$

$$= 2\pi - 2\pi^2 + 3\pi^2 + \frac{\pi^4}{4} - 2\pi = \pi^2 + \frac{1}{4}\pi^4$$

【例 10.11】 已知曲线积分 $I = \oint_L y^3\mathrm{d}x + (3x - x^3)\mathrm{d}y$，

其中 L 为 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$ 的正向，求：

(1) R 为何值时，$I = 0$；　(2) 求 I 的最大值.

【解】 设曲线 $L: x^2 + y^2 = R^2$ 围成的区域，记作 D.

于是 $$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (3 - 3x^2 - 3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_D (1 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R (1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho = 6\pi\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R = 3\pi R^2\left(1 - \frac{R^2}{2}\right).$$

(1) 当 $R = \sqrt{2}$ 时，$I = 0$（$R = 0$ 舍去，因为 $R > 0$）.

(2) $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}R} = 6\pi R(1 - R^2)$，令 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}R} = 0 \Rightarrow R = 1$，故当 $R = 1$ 时，I 取最大值，$I_{\max} = \frac{3}{2}\pi$.

题型 Ⅲ　对面积的曲面积分计算

【解题提示】 (1) 曲面积分 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 的计算是化为投影域的二重积分计算. 例如 $\Sigma: z = z(x,y)$. 则 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\cdot\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

注　若曲面 Σ 与平行于坐标轴的直线的交点超过两点（包括两点），则必须将曲面分成几块，使每块与平行于坐标轴的直线只交于一点.

(2) 应用曲面的对称性及被积函数 $f(x,y,z)$，关于 x,y,z 的奇偶性简化运算.

(3) 曲面积分可将曲面 Σ 的表达式直接代入积分式以简化运算. 例如：$\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，计算 $\iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma R^2\mathrm{d}S = R^2\iint_\Sigma \mathrm{d}S = R^2 \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^4$.

(4) 有时将对面积的曲面积分化为对坐标的曲面积分计算.

【例 10.12】 求下列对面积的曲面积分：

(1) $I = \iint_\Sigma \left(2x + \frac{4}{3}y + z\right)\mathrm{d}S$，其中 S 是平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限部分.

(2) $I = \iint_\Sigma y\mathrm{d}S$，其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(3) $I = \iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 介于 $z = 0$ 及 $z = 1$ 之间的部分.

【解】 (1) $I = 4\iint_\Sigma \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4}\right)\mathrm{d}S = 4\iint_\Sigma 1\mathrm{d}S = 4A$，

其中 A 为 Σ 在第Ⅰ卦限的面积. Σ 在 x,y,z 轴上的截点坐标分别为 $P(2,0,0)$，$Q(0,3,0)$，$R(0,0,4)$. 则

$$A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|12\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}|=\sqrt{61},$$

故 $I=4\sqrt{61}$.

(2) 由于 $f(x,y,z)=y$,关于 xOz 坐标面为奇函数,又球面 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=9$ 关于 xOz 坐标面为对称的,y 轴为对称轴,故 $I=0$.

(3) $$I=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\left[(x^2+y^2)+\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2+\rho)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\sqrt{2}\left(\frac{\rho^4}{4}+\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^1=\frac{7\sqrt{2}}{6}\pi.$$

【例 10.13】 计算 $I=\iint_\Sigma(x+y+z)\mathrm{d}S$,其中 $\Sigma:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

【解】 由于曲面 Σ 对称于 z 轴,所以 $\iint_\Sigma(x+y)\mathrm{d}S=0$,

于是,$I=\iint_\Sigma z\mathrm{d}S$ 由于 $\Sigma:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 可看出作如下变换简单,

令 $\begin{cases}x=a\sin\varphi\cos\theta\\ y=a\sin\varphi\sin\theta,\\ z=a\cos\varphi\end{cases}$

则 $\mathrm{d}S=a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$. 于是

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}a\cos\varphi\cdot a^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)=\pi a^3.$$

【例 10.14】 计算 $I=\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{1+z^2}}$,其中 Σ 为方程组 $\begin{cases}(x-1)\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=0\\(1-x)\sin\alpha+y\cos\alpha=0\end{cases}$

($\alpha=\alpha(x,y)$ 为参变数) 所定义的曲面 $z=z(x,y)$ 介于平面 $z=1$ 及 $z=\mathrm{e}$ 之间部分.

【解】 $\Sigma:\begin{cases}(x+1)\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=0\\(1-x)\sin\alpha+y\cos\alpha=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(x-1)\cos\alpha+y\sin\alpha=-\ln z\\(1-x)\sin\alpha+y\cos\alpha=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}(x-1)^2\cos^2\alpha+2y(x-1)\cos\alpha\sin\alpha+y^2\sin^2\alpha=(\ln z)^2\\(1-x)^2\sin^2\alpha+2y(1-x)\cos\alpha\sin\alpha+y^2\cos^2\alpha=0\end{cases}$

$\Rightarrow(x-1)^2+y^2=(\ln z)^2\Rightarrow\ln z=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Rightarrow z=\mathrm{e}^{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$,

$$z'_x=\mathrm{e}^{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}},z'_y=\mathrm{e}^{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}\frac{y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}y=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{(x-1)^2+y^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$z=1\Rightarrow(x-1)^2+y^2=0$,

$$z = \mathrm{e} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{(x-1)^2+y^2}}}}\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{(x-1)^2+y^2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\mathrm{d}\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

题型Ⅳ　对坐标系的曲面积分计算

【解题提示】　解题方法有以下三种.

(1) 利用奥高公式.

① 若 P,Q,R 在闭曲面 Σ 所围空间域 Ω 中有连续的一阶偏导数，则 $\oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Σ 取外侧.

② 若 P,Q,R 比较复杂，Σ 非闭，Σ 加面 Σ_* 后闭合，且 P,Q,R 在 Σ 与 Σ_* 所围空间域 Ω 中有一阶连续偏导，则

$$I = \iint_{\Sigma+\Sigma_*} - \iint_{\Sigma_*} = \iiint_\Omega - \iint_{\Sigma_*}.$$

(2) 矢量的点积法.

设曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y)$，规定 Σ 的法向量为 $\{-f_x',-f_y',1\}$. 则

$$I = \iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Sigma\{P,Q,R\}\cdot\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$$

$$= \iint_\Sigma\{P,Q,R\}\cdot\{-f_x',-f_y',1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{将}\Sigma\text{在}xOy\text{面投影}} \pm\iint_{D_{xy}}\{P,Q,R\}\cdot\{-f_x',-f_y',1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

"±"的确定：若题设中曲面 Σ 的侧与 $\{-f_x',-f_y',1\}$ 相同，取"+"，否则取"−". 本法最适用于曲面 Σ 在 xOy 平面上投影为一个区域，且 $\{P,Q,R\}\cdot\{-f_x',-f_y',1\} = -Pf_x'-Qf_y'+R$ 简单者.

(3) 通过投影化为二重积分.

$$I = \iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_\Sigma Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm\iint_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \pm \iint_{D_{zx}}Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x \pm \iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

"±"号的确定：

若 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴（为平面 yOz 的法向量）的夹角 $(\boldsymbol{n},\hat{\ }x)$ 为锐角，则上式右边第一个积分前取"+"，否则取"−".

若 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴（为平面 zOx 的法向量）的夹角 $(\boldsymbol{n},\hat{\ }y)$ 为锐角，则上式右边第二个

积分前取“+”,否则取“-”.

若Σ的法向量$\boldsymbol{n}$与z轴(为平面xOy的法向量)的夹角$(\widehat{\boldsymbol{n},z})$为锐角,则上式右边第三个积分前取“+”,否则取“-”.

由以上的规定,即可得出:

曲面的前侧、右侧、上侧均取“+”;后侧、左侧、下侧取“-”. 闭曲面的外侧取“+”,内侧取“-”.

【例 10.15】 计算下列曲面积分:

(1) 设$f(u)$具有连续导数,计算$I=\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与球面$x^2+y^2+z^2=1,x^2+y^2+z^2=4$所围立体表面的外侧.

(2) 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,式中$\Sigma$为球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$的外侧.

【解】 曲面Σ是闭的,且P,Q,R在Σ所围形体中具体连续的一阶偏导数,故可用奥高公式计算.

(1) $\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3y^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3z^2,$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=6\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{5}r^5\Big|_1^2=\frac{93\pi}{5}(2-\sqrt{2}).$$

(2) $I=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega}[(x-a)+(y-b)+(z-c)+(a+b+c)]\mathrm{d}V$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}[(x-a)+(y-b)+(z-c)]\mathrm{d}V+2(a+b+c)\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V.$$

因为$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\frac{4}{3}\pi R^3$,

$$\iiint\limits_{\Omega}(z-c)\mathrm{d}V=\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{c-\sqrt{R^2-(x-a)^2+(y-b)^2}}^{c+\sqrt{R^2-(x-a)^2+(y-b)^2}}(z-c)\mathrm{d}z$$

$$\xlongequal{\text{令 }u=z-c}\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{R^2-(x-a)^2+(y-b)^2}}^{\sqrt{R^2-(x-a)^2+(y-b)^2}}u\mathrm{d}u=0$$

(因为后一项积分为0),

由对称性可知$\iiint\limits_{\Omega}(x-a)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}(y-b)\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}(z-c)\mathrm{d}V=0.$

故 $I=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$

【例 10.16】 计算下列曲面积分：

(1) $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$，$z=2$ 所围形体表面的外侧.

(2) $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+z^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$. 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

【解】 由于 P,Q,R 在曲面 Σ 所围成的形体中的一阶偏导数不连续，所以该题不能用奥高公式做，只能用投影法做.

(1) 如图 10.6，记 $\Sigma_1:z=2$，$\Sigma_2:z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\Sigma_3:z=1$，于是

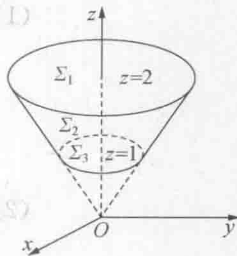


图 10.6

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3},$$

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=e^2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{\rho}{\rho}d\rho$$

$$=4\pi e^2,$$

$$I_2=-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{e^\rho}{\rho}\cdot\rho d\rho=-2\pi(e^2-e),$$

$I_3=-2\pi e$,

故 $I=I_1+I_2+I_3=2\pi e^2$.

(2) 令 $\Sigma_1:z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$（上半球面），$\Sigma_2:z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$（下半球面）.

于是 $I=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}$.

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+z^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{R}\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+z^2dxdy$$

$$=\frac{1}{R}\left[\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_*}(xdydz+z^2dxdy)-\iint\limits_{\Sigma_*}xdydz+z^2dxdy\right]$$

$$=\frac{1}{R}\left[\iiint\limits_{\Omega}(1+2z)dv-\iint\limits_{\Sigma_*}\right],$$

其中 $\iint\limits_{\Sigma_*}:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant R^2\\z=0\end{cases}$，其法向量与 z 轴相反.

因为 $\iint\limits_{\Sigma_*}xdydz+z^2dxdy=0$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(1+2z)dv=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R(1+2r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}r^3\sin\varphi+\frac{1}{2}r^4\sin\varphi\cos\varphi\right]_0^R d\varphi$$

$$=2\pi R^3\left(-\frac{1}{3}\cos\varphi+\frac{1}{4}R\sin^2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi R^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}R\right),$$

所以$I_1 = 2\pi R^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}R\right)$.

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{R}\iint_{\Sigma_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{R}\left[\oiint_{\Sigma_2+\Sigma_{**}} - \iint_{\Sigma_{**}}\right],$$

其中$\Sigma_{**}:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant R^2\\ z=0\end{cases}$,其法向量与$z$轴同向.

同理可得$\iint_{\Sigma_{**}} = 0$.

$$\oiint_{\Sigma_2+\Sigma_{**}} = \iiint_{\Omega}(1+2z)\mathrm{d}v = 2\pi R^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}R\right),$$

故　$I = \frac{4}{3}\pi R^2$.

【另解】 将$x^2+y^2+z^2=R^2$直接代入被积函数中,得

$$I = \frac{1}{R}\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{R}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}(1+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4}{3}\pi R^2.$$

【例 10.17】 计算下列曲面积分:

(1) $I = \iint_{\Sigma} 4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为曲线$\begin{cases}z=\mathrm{e}^y, 0\leqslant y\leqslant a\\ x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转而成的曲面的下侧;

(2) $I = \iint_{\Sigma}(y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$是$z=2-x^2-y^2(1\leqslant z\leqslant 2)$的上侧.

【解】 加一个或几个曲面后,曲面封闭,而$\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$在闭曲面围成的形体中连续,则可用奥高公式.这种类型题是考试重点,多加注意.

(1) 曲线$\begin{cases}z=\mathrm{e}^y\\ x=0\end{cases}(0\leqslant y\leqslant a)$绕$z$轴旋转所成旋转面记为

$\Sigma: z = \mathrm{e}^{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$,令$\Sigma_*: z=\mathrm{e}^a$,则

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_*} - \iint_{\Sigma_*} = \iiint_{\Omega}(4z-2z-2z)\mathrm{d}V - \iint_{D_{xy}}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0-(1-\mathrm{e}^{2a})\iint_{D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= (\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2 = \pi a^2(\mathrm{e}^{2a}-1).$$

(2) 令$\Sigma_*: z=1$,则

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma_*} - \iint_{\Sigma_*} = \iiint_{\Omega}(-1-1-1)\mathrm{d}V - \left(-\iint_{D_{xy}}(x-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$= -3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V + \int_{-1}^{1}(x-1)\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$= -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_1^{2-\rho^2}\mathrm{d}z + \int_{-1}^{1}2(x-1)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3}{2}\pi-\pi=-\frac{5}{2}\pi.$$

【例 10.18】 求下列曲面积分：

(1) $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 Σ：平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分，法向量指向原点；

(2) $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1$，$z=2$ 所截部分的外侧.

【解】 (1) Σ：$x+y+z=1$，$z=1-x-y$，$z_x'=-1$，$z_y'=-1$，

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\{x+1,y,1\}\cdot\{1,1,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal[\text{与}\{1,1,1\}\text{相反}]{\Sigma\text{的法向量}}-\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+2+y)\mathrm{d}y=-\frac{4}{3}.$$

(2) $$I=\iint\limits_{\Sigma}\{x-y,x+y,z^2\}\cdot\left\{-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}(-\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2(-\rho+\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=-\frac{17}{6}\pi.$$

【例 10.19】 设 ρ 表示从原点到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上 $P(x,y,z)$ 点的切平面的垂直距离. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathrm{d}s$，其中 Σ 为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

【解】 对于椭球面上任意一点 $P(x,y,z)$，可求出其切平面方程为 $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1$，其中 (X,Y,Z) 为切平面上点的流动坐标，则从原点到该切平面的距离

$\rho=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}$，于是

$$\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\rho\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\frac{c^2}{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{c^2}{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{c^2}{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{c^2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}\frac{c^2}{-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2c^2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ_1，Σ_2 分别为上、下半椭球面.

因为 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$，

所以 $$\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathrm{d}s=2c\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\xlongequal{\begin{cases}x=\rho a\cos t\\y=\rho b\sin t\end{cases}}2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\int_0^1\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= 4\pi abc\sqrt{1-\rho^2}\Big|_1^0 = 4\pi abc.$$

【例 10.20】 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x-y+z=1$ 在第 Ⅳ 卦限部分的上侧.

【解】 如图 10.7 所示，被积函数中 $f(x,y,z)$ 没有具体给出，因此无论用投影法或加面用奥高公式均行不通，由于 Σ 为一平面，其法向量的方向余弦可得，故不妨用两类曲面积分的关系一试. 平面 Σ 的法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,1\}$，则

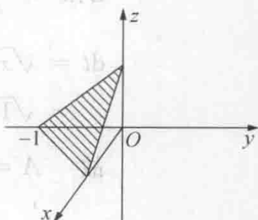


图 10.7

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{，于是}$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+x]-\frac{1}{\sqrt{3}}[2f(x,y,z)+y]+\frac{1}{\sqrt{3}}[f(x,y,z)+z]\right\}\mathrm{d}S.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

题型 Ⅴ　曲面面积的计算

【解题提示】 曲面面积的计算方法有三：

(1) 利用二重积分（适用于：已知曲面 Σ 的方程及其在坐标面上的投影（或易求出投影域））. 例如，Σ：$z=f(x,y)$，在 xOy 平面上投影域为 D_{xy}，则 Σ 的面积 A 为

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(2) 利用对弧长的曲线积分（适用于：曲面在某坐标面上的投影为一条曲线的情形）. 例如，若曲线 L^* 上点的竖坐标是 L 上的点 P 的函数，$z=f(x,y)$，则 $A=\int_L f(x,y)\mathrm{d}l$；

(3) 利用对面积的曲面积分（适用于：柱面、锥面、球面、抛物面的某一部分面积的计算）

$$A=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S.$$

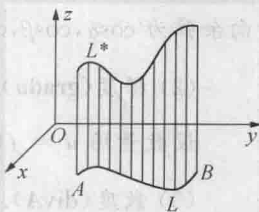


图 10.8

【例 10.21】 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所切下的部分的曲面面积.

【解】 两曲面的交线 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z^2=2x\end{cases}\Rightarrow 2x=x^2+y^2$，

即 $(x-1)^2+y^2=1$，由此可知锥面被切下部分在 xOy 坐标面上的投影域为 D_{xy}：$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$，于是利用二重积分法可得

$$A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,z=\sqrt{x^2+y^2},z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow A=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.$$

【例 10.22】　求椭圆柱面 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 位于 xOy 平面上方和平面 $z=y$ 下方那部分侧面面积.

【解】　如图 10.9 所示，所求的是部分柱面的面积，因此用曲线积分求简便.

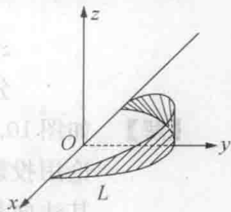


图 10.9

$$A=\int_L z\,\mathrm{d}l,$$

$$L: x^2+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant \pi,$$

$$\mathrm{d}l=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{(-\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{1+3\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

故　$$A=\int_L z\,\mathrm{d}l=\int_0^{\pi}2\sin t\sqrt{1+3\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=-2\int_0^{\pi}\sqrt{1+3\cos^2 t}\,\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi}\sqrt{1+(\sqrt{3}\cos t)^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{3}\cos t)\xlongequal{\text{令 } u=\sqrt{3}\cos t}-\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}[4\sqrt{3}+2\ln(2+\sqrt{3})].$$

题型 Ⅵ　场论初步

(1) 方向导数的求法.

设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点可微，过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点的有向线段 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P.$

(2) 梯度(**grad**u).

设数量场 $u=f(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，则　$\mathbf{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$

(3) 散度(div$\boldsymbol{A}$).

设有一向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，$P,Q,R$ 均可导，则 $\boldsymbol{A}$ 在 $M(x,y,z)$ 点处的散度为　$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$

(4) 旋度(**rot**$\boldsymbol{A}$).

设有向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中 P,Q,R 均有连续的一阶偏导数，则旋度 **rot**$\boldsymbol{A}$ 为

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

【例 10.23】　设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 在 $P(1,0,-1)$ 处指向外侧的法矢量，则

$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在 P 点处沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数，并求 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)$.

【解】 令 $F(x,y,z)=xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}-\sqrt{2}$，

因为 $F_x'\Big|_P=\left(yz+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\Big|_P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$F_y'\Big|_P=\left(xz+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\Big|_P=-1,\quad F_z'\Big|_P=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

所以 $\boldsymbol{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}},-1,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\gamma=-\dfrac{1}{2}$，

$\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_P=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}\Big|_P=1$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_P=0$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_P=-1$，

故 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_P=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_P=\dfrac{1}{2}+0+\dfrac{1}{2}=1$，

$$\mathbf{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{i}+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{j}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{k},$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}.$$

【例 10.24】 问函数 $u=\ln[x+y+z+\sqrt{1+(x+y+z)^2}]$ 在 $P(1,1,1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？并求此最大值.

【解】 由梯度的定义可知，沿梯度方向是方向导数取最大值的方向，所以有

$$\mathbf{grad}u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{1+(x+y+z)^2}},\frac{1}{\sqrt{1+(x+y+z)^2}},\frac{1}{\sqrt{1+(x+y+z)^2}}\right\},$$

$$\mathbf{grad}u\Big|_D=\left\{\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right\},\ |\mathbf{grad}u|_P=\sqrt{3\times\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{10}},$$

故 u 在 $P(1,1,1)$ 处沿方向 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right\}$ 的方向导数最大，最大值为 $\sqrt{\dfrac{3}{10}}$.

【例 10.25】 设函数 $u=\mathrm{e}^{xyz}+\int_0^{xy}t\sin t\mathrm{d}t+\int_0^{yz}t^2\mathrm{d}t$，求 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)$.

【解】 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz\mathrm{e}^{xyz}+xy^2\sin(xy)+0=yz\mathrm{e}^{xyz}+xy^2\sin(xy)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xz\mathrm{e}^{xyz}+x^2y\sin(xy)+y^2z^3,\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=xy\mathrm{e}^{xyz}+y^3z^2$，

所以 $\mathbf{grad}u=[yz\mathrm{e}^{xyz}+xy^2\sin(xy)]\boldsymbol{i}+[xz\mathrm{e}^{xyz}+x^2y\sin(xy)+y^2z^3]\boldsymbol{j}+(xy\mathrm{e}^{xyz}+y^3z^2)\boldsymbol{k}$，

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz\mathrm{e}^{xyz}+xy^2\sin(xy) & xz\mathrm{e}^{xyz}+x^2y\sin(xy)+y^2z^3 & xy\mathrm{e}^{xyz}+y^3z^2\end{vmatrix}$$

$$=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

第十一章* 无穷级数

题型 I 有关级数概念及性质的命题

【解题提示】

(1) 求数项级数的和的一种方法是利用级数收敛性的定义，而利用定义求和通常是将一般项(若通项) u_n 拆成两项差：$u_n = v_{n+1} - v_n$，在求前 n 项和 S_n 时消掉中间各项，仅留首尾项.

(2) 利用无穷级数收敛的必要条件，求以“0”为极限的一种极限. 解题程序是：① 将欲求的极限式作为无穷级数的一般项(或通项) u_n. ② 判别 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，从而得出 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

【例 11.1】 求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$.

【解】 (1) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$,

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \to \frac{1}{4}, (n\to\infty)$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

(2) $$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 1, (n\to\infty)$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = 1.$$

【例 11.2】 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)} (b > a > 0)$.

【解】 作数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)[(n+1)a+1]}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)[(n+1)b+1]} \cdot \frac{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1} = \frac{a}{b} < 1,$$

所以级数收敛.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)} = 0$,当($b > a > 0$ 时).

题型 Ⅱ 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geqslant 0)$ 的判敛

【解题提示】 根据通项 u_n 的特点选择适当的判别法;

1° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2° 若 u_n 中含有 $n!$ 或关于 n 的若干连乘积形式时用比值法.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho\begin{cases} >1, \sum u_n \text{ 发散} \\ =1, \text{方法失效} \\ <1, \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}.$$

3° 若 u_n 中含有以 n 为指数幂的因子时,用根值法.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho\begin{cases} >1, \sum u_n \text{ 发散} \\ =1, \text{方法失效} \\ <1, \sum u_n \text{ 收敛} \end{cases}.$$

注 u_n 中既含有 $n!$ 又含有以 n 为指数幂的因子时,用比值法.

4° 当比值法、根值法失效时,用比较法的极限形式(即若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 < A < +\infty)$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 具有相同的敛散性).

5° 由比较法的极限和一般形式可得如下快速判敛法:

① 设分母、分子关于 n 的最高次数分别为 p,q.

当 $p-q > 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geqslant 0)$ 收敛,

当 $p-q \leqslant 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;

② 设 $n\to\infty$ 时,$u_n \sim v_n$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性.

【例 11.3】 判别下列无穷级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}[\sqrt{2}+(-1)^n]^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$; (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{5/4}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{2^n}$; (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-n+(-1)^n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$.

【解】 (1) 用根值法 $\frac{1}{3^n}[\sqrt{2}+(-1)^n]^n \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)^n$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收

敛.

(2) 用比值法　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{2^n\cdot n!}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\frac{2}{\mathrm{e}}<1, \text{故}\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{ 收敛.}$$

(3) 比值法、根值法均失效,用极限形式的比较法.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n^{6/5}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)\cdot n^{6/5}}{n^{5/4}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\frac{1}{20}}}=0$,因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{6/5}}$ 收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) $n\to\infty$ 时,$u_n\sim n\cdot\dfrac{\pi}{2^n}$,因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\pi}{2^n}$ 收敛$\left(\text{因为}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n\pi}{2^n}}=\dfrac{1}{2}<1\right)$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^{-n+(-1)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{-n+(-1)^n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}3^{-1+\frac{(-1)^n}{n}}=\dfrac{1}{3}<1$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(6) 因为 $0<u_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\frac{1}{\mathrm{e}^n}$,

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}$ 收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

题型 Ⅲ　任意项级数的判敛

【解题提示】 (1) 任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的判敛程序:

① 判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的敛散性,若$\sum|u_n|$ 收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 用比值法或根值法判别其发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散(因为此时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$).

② 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 用比较法判别其发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为交错级数,则用莱布尼兹判别准则判别;

③ 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 不是交错级数,或是交错级数,但 $u_n\geqslant u_{n+1}$ 不总是成立,则用$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}\overset{?}{=}\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}$来判别,其中 $S_{2n}=u_1+u_2+\cdots+u_{2n}$;$S_{2n+1}=u_1+u_2+\cdots+u_{2n}+u_{2n+1}$.

(2) 任意项级数的判敛是常考题型,通常以单项选择题形式出现.

【例 11.4】 设 $\lambda\geqslant0$ 为常数,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan(\sqrt{n^2+\lambda}\pi)$　【　】

(A) 发散.　(B) 绝对收敛.　(C) 条件收敛.　(D) 敛散性与 λ 有关.

【解】 $u_n=\tan(\sqrt{n^2+\lambda}\pi)=\tan[(\sqrt{n^2+\lambda}-n+n)\pi]=\tan(\sqrt{n^2+\lambda}-n)\pi$

$$=\tan\frac{\lambda\pi}{\sqrt{n^2+\lambda}+n},$$

所以 u_n 单调减少且趋于 0，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan(\sqrt{n^2+\lambda}\pi)$ 条件收敛.

故 (C) 入选.

【例 11.5】 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$； (2) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)$；

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$.

【解】 (1) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+(-1)^n}}=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}(-1)^n}}=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{1}{2}o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

$=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}o\left(\frac{1}{n}\right)$,

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}o\left(\frac{1}{n}\right)$ 均收敛（前者条件收敛），

所以 $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

(2) $u_n=\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=(-1)^n\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)\sim(-1)^n\frac{1}{\ln n}$，($n\to\infty$ 时)

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 条件收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

(3) 讨论加括号后的级数：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\cdots.$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{\sqrt{n}+1-(\sqrt{n}-1)}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)}=\frac{2}{n-1},$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1}$ 发散， 故原级数发散（加括号后的级数发散，则原级数发散）.

【例 11.6】 讨论级数 $1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x}+\cdots$ 在哪些 x 处收敛?在哪些 x 处发散?

【解】 (1) 当 $x=1$ 时，原级数变为

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$，这是莱布尼兹型交错级数. 故收敛.

(2) 当 $x>1$ 时，$S_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2^x}\left(1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}\right)$,

当 $n\to\infty$ 时，前一括号 $\to+\infty$，后一括号 $\to$ 定值（因为 $x>1$），

故 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$，即级数发散.

(3) 当 $x<1$ 时，$S_{2n+1}=1-\left(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^x}-\frac{1}{5}\right)-\cdots\left(\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}\right)$，由于

$x < 1$，所以 S_{2n+1} 中 1 后各项均为负的.

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}\right]$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}\right]\Big/\frac{1}{n^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-(2n)^x}{(2n+1)2^x}=\frac{1}{2^x}$，

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}(x<1)$ 发散，故　$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\infty$，　即 $\sum u_n$ 发散.

综上所述，当 $x=1$ 时，级数收敛；$x\neq 1$ 时，级数发散.

题型 Ⅳ　有关数项级数的命题的证明

【解题提示】 (1) 已知某级数收敛，欲证另一级数收敛，慎用根值法和比值法判别（因为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，不一定有 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho<1$ 和 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$），一般用比较法判别. 已知收敛的级数被用作比较的级数.

(2) 已知某数列有某种性质（有界性、单调性、有极限），欲证某级数收敛，通常是用这些性质对无穷级数的通项 u_n 作某种估计，再用比较法判别或用级数敛散性定义.

(3) 若欲证级数的通项与已知敛散性级数的通项有某种四则运算关系，通常用级数敛散性的定义分析.

【例 11.7】 已知数列 $\{na_n\}$ 收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 也收敛，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

【证】 设 $\sum_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+4(a_4-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n-1})+(n+1)(a_{n+1}-a_n)$$
$$=(n+1)a_{n+1}-a_1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+1)a_{n+1}-a_1-\sigma_n,$$

其中 σ_n 为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项和，于是 $\sigma_n=(n+1)a_{n+1}-a_1-S_n$，

因为 $\sum_{n=2}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，不妨设 $S_n\to S(n\to\infty)$，

$\{na_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim_{n\to\infty}na_n=l$.

所以 $\sigma_n\to l-a_1-S$，　故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

【例 11.8】 设 $a_n-a_{n-1}=d$（定常数），$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$，定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}$ 收敛.

【证】 因为 $a_n-a_{n-1}=d$，

所以 $\{a_n\}$ 为等差数列，于是 $a_{n+m}=a_n+md$，　即 $a_{n+m}-a_n=md$.

$$u_n=\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}=\left(\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+m}}\right)\frac{1}{a_{n+m}-a_n}$$
$$=\frac{1}{md}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}-\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+m}}\right),$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}u_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{md}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}\cdots a_{k+m-1}}-\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{k+m}}\right)$$

$$= \frac{1}{md}\left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_m} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+m}}\right),$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$， 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+m}} = 0$，

故 $S_n \to \frac{1}{(a_1 a_2 \cdots a_m) md}, (n \to \infty)$.

【例 11.9】 设 $a_n \neq 0, (n = 1, 2, \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. 证明无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| \text{ 同时收敛或同时发散.}$$

【证】 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| \Big/ \left|\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} a_n| = a^2$（因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$），由

比较判别法的极限形式，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 具有相同的敛散性.

【例 11.10】 设 $a_n > 0$，$\{a_n\}$ 单调减少趋于零，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ 收敛.

【证】 因为 $a_n > 0$，且 $\{a_n\}$ 单调减少，所以 $\sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ 也单调减少，

又因为 $0 < \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} \leqslant \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = 0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}} = 0$，由交错级数判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ 收敛.

【例 11.11】 设 $\{a_n\}$ 是单调增加的正数数列，且有界，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

【证】 由题设 $\{a_n\}$ 收敛，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$，

又由题设有 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \cdots$，于是级数的通项 u_n 有

$0 \leqslant u_n = 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} < \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1}$，

因为 $S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) = -a_1 + a_{n+1} \to -a_1 + l (n \to \infty)$，

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ 收敛.

由比较法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

【例 11.12】 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} \mathrm{d}x$ 收敛.

【证】 令 $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x} \mathrm{d}x$， $v_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} \mathrm{d}x$，

显然 $0 < v_n < u_n$， 因为 $u_n = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，

由比较法可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} \mathrm{d}x$ 收敛.

题型 V　函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求收敛域，幂级数求收敛域、收敛半径 R

【解题提示】　解题程序：

① 用根值法（或比值法）求 $\rho(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho(x) \quad \left(\text{或} \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \rho(x)\right);$$

② 解不等式方程 $\rho(x) < 1$，求出 $u_n(x)$ 的收敛区间 (a,b)；

③ 考察 $x = a$（或 $x = b$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)$（或 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$）的敛散性；

④ 写出 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域.

幂级数是函数项级数的特例，因此其收敛域仿照函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求，若已求出幂级数的收敛区间 (a,b)，则其收敛半径 $R = \frac{b-a}{2}$.

【例 11.13】　求下列函数项级数的收敛域：

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$$

【解】　(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \left|\frac{x-1}{x+1}\right|^n} = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$，

令 $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x-1| < |x+1| \quad \Rightarrow \quad x \in (0, +\infty)$，

当 $x = 0$ 时，原级数 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

故其收敛域为 $[0, +\infty)$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n \sin^n x}{n^2}\right|} = 2|\sin x|$，

令 $2|\sin x| < 1$，则 $k\pi - \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{6}$，（$k$ 为整数）

当 $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$，则原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 绝对收敛.

故原级数的收敛域为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right]$.

【例 11.14】　求下列幂级数的收敛域和收敛半径：

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n n} x^{2n-3}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n)};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 8^n}{n \ln(n^3 + 2n^2 + n)} x^{3n-2}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n 3^n}.$$

【解】　(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n} |x|^{2n-3}} = \frac{|x|^2}{2}$，

令 $\frac{|x|^2}{2}<1 \Rightarrow |x|<\sqrt{2}$，即 $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

当 $x=\sqrt{2}$ 时，原级数变为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{2}n}$，收敛.

当 $x=-\sqrt{2}$ 时，原级数变为 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{2}n}$，收敛.

故收敛域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，收敛半径 $R=\frac{\sqrt{2}-(-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{2}$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^{2n}}{(2n-1)(2n)}}=|x|^2$，

令 $|x|^2<1 \Rightarrow |x|<1 \Rightarrow x\in(-1,1)$，

当 $x=\pm 1$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n)}$ 收敛.

故收敛域为 $[-1,1]$，收敛半径 $R=1$.

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{8^n|x|^{3n-2}}{n\ln(n^3+2n^2+n)}}=8|x|^3$，

令 $8|x|^3<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{2} \Rightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，原级数变为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}8^n}{n\ln(n^3+2n^2+n)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-2}$$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4}{n\ln(n^3+2n^2+n)}$，收敛（满足莱布尼兹交错级数收敛条件）.

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，原级数变为 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\ln(n^3+2n^2+n)}$，发散.

故该级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，收敛半径 $R=\frac{1}{2}$.

(4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x-3|^n}{n3^n}}=\frac{|x-3|}{3}$，

令 $\frac{|x-3|}{3}<1 \Rightarrow |x-3|<3 \Rightarrow x\in(0,6)$，

当 $x=0$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛.

当 $x=6$ 时，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散.

故该级数收敛域为 $[0,6)$，收敛半径 $R=\frac{6-0}{2}=3$.

题型Ⅵ　求函数的幂级数展开式

【解题提示】（1）必须熟记以下七个展开式：

① $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u^n,(-1,1)$

② $\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\cdots+(-1)^nu^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nu^n,(-1,1)$

③ $e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\cdots+\frac{1}{n!}u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!},(-\infty,+\infty)$

④ $\sin u=u-\frac{1}{3!}u^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}u^{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!},(-\infty,+\infty)$

⑤ $\cos u=1-\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{4!}u^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}u^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!},(-\infty,+\infty)$

⑥ $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\cdots+(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{(n+1)},(-1,1]$

⑦ $(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+\cdots,(-1,1)$

（2）将给定函数在某点处展成泰勒级数有两种方法：直接法与间接法，一般用间接法．所谓间接法就是利用以上7个展开式，通过适当的变量替换、四则运算、复合以及逐项微分、积分而将一个函数展成幂级数的方法．

【例 11.15】 求下列函数在指定点处的泰勒展开式：

（1）$f(x)=\ln(3-2x-x^2)$，在 $x=0$ 处；

（2）$f(x)=\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}dx$，在 $x=0$ 处；

（3）$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$，在 $x=2$ 处；

（4）$f(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right)$，在 $x=1$ 处．

【解】（1）$f(x)=\ln(x+3)(1-x)=\ln(3+x)+\ln(1-x)$．

因为 $\ln(1-x)\xlongequal{\text{由公式⑥}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},(-1,1]$

$$\ln(3+x)=\ln3+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)=\ln3+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{n+1}}{n+1},(-3,3]$$

所以　$f(x)=\ln(3-2x-x^2)=\ln3+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}-1\right]\frac{x^{n+1}}{n+1},(-1,1]$．

（2）因为 $f'(x)=\left(\int_0^x\frac{\ln(1+x)}{x}dx\right)'_x=\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1},(-1,1]$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1},(-1,1].$$

所以 $f(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}\right]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$，$[-1,1]$.

(3) $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right)$，

因为 $\frac{1}{x-3}=\frac{1}{(x-2)-1}=-\frac{1}{1-(x-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$，$(1,3]$，

$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x-2)+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$，$(-1,5]$，

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right](x-2)^n$，$(1,3]$.

(4) 因为 $e^x=e\cdot e^{x-1}$

$$=e\left[1+(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(x-1)^n+\cdots\right],$$

所以 $\frac{e^x-e}{x-1}=e\left[\frac{(x-1)}{2!}+\frac{(x-1)^2}{3!}+\cdots+\frac{(x-1)^{n-1}}{n!}+\cdots\right]$，$x\neq 1$，

故 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e}{x-1}\right)=e\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}(x-1)+\cdots+\frac{n-1}{n!}(x-1)^{n-2}+\cdots\right]$，$x\neq 1$.

【例 11.16】 将下列函数展成幂级数：

(1) $f(x)=\arctan\frac{4+x^2}{4-x^2}$，在 $x=0$ 处；

(2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}$，在 $x=1$ 处.

【解】 (1) $f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)'=\frac{8x}{16+x^4}=\frac{x}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^4}$

$$=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{4n+1}}x^{4n+1}\ (|x|<2),$$

于是，$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left(\frac{(-1)^n}{2^{4n+1}}x^{4n+1}\right)dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{4n+1}}\cdot\frac{x^{4n+2}}{(4n+2)},$$

又 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，故 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{4n+1}(4n+2)}x^{4n+2}$，$(-2,2)$.

(2) $f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}\overset{\text{由公式④}}{=\!=\!=}2\sin\frac{x}{2}$，$(-\infty,+\infty)$，

于是，$f(x)=2\sin\frac{1+(x-1)}{2}=2\sin\left(\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2}\right)$

$$=2\left(\sin\frac{1}{2}\cos\frac{x-1}{2}+\cos\frac{1}{2}\sin\frac{x-1}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}+$$

$$2\cos\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n+1}\quad(-\infty,+\infty).$$

题型 Ⅶ　级数求和

【解题提示】 1. 幂级数求和(重点)解题程序:

(1) 求出级数的收敛域(一般讲,若 $u_n(x)$ 的分母中含有阶乘 $n!,(2n)!,(2n+1)!$,则收敛域为 $(-\infty,+\infty)$);

(2) 通过逐项积分或微分将给定的幂级数化为 7 个展开式中的一种形式(或和函数 $f(x)$ 与其导数的关系),从而得出新级数的和函数;

(3) 对得到的和函数作相反的分析运算,便可得幂级数的和函数.

【例 11.17】 求下列幂级数的和函数:

(1) $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^{n-1}$.

【解】 (1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{4n^2-1}\,|x|^{2n+1}}=|x|^2$,令 $|x|^2<1\Rightarrow|x|<1\Rightarrow x\in(-1,1)$,

令　$x=-1$ 时,原级数变为 $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$,收敛,

令　$x=1$,原级数变为 $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$,收敛,故收敛域为 $[-1,1]$.

令
$$f(x)=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)(-1)^{n+1}x^{2n+1}$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=(1+x^2)g(x),$$

其中,$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.

$$g(x)=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right)'\right]dx=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(2n+1)x^{2n}\right]dx$$
$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2)^n\right]dx=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_0^x=\arctan x,$$

故　$f(x)=(1+x^2)\arctan x,[-1,1]$.

(2) 易求出该幂级数的收敛域为 $[-2,2)$.

令
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n\cdot 2^n}x^n\right)'\right]dx$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n-1}\right)dx=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]dx$$
$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{2-x}dx=\frac{1}{x}[\ln 2-\ln(2-x)],x\neq 0.$$

由于和函数 $f(x)$ 在收敛域内的连续性,所以

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 2-\ln(2-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2},$$

故 和函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln 2-\ln(2-x)}{x}, & x\in[-2,0]\cup(0,2)\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$.

【例 11.18】 已知 $a_0=3,a_1=5$,且对任何自然数 $n>1$,$na_n=\frac{2}{3}a_{n-1}-(n-1)a_{n-1}$,证明:

当 $|x|<1$ 时,幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛,并求其和函数.

【解】 由题设可知 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}-n\right)a_n$,于是有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}\left(\frac{2}{3}-n\right)a_n}{a_n}\right||x|=|x|.$$

当 $|x|<1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛,令 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$=5+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}a_n-na_n\right)x^n=5+\frac{2}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-a_0\right)-x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

$$=5+\frac{2}{3}f(x)-\frac{2}{3}\cdot 3-xf'(x)=3+\frac{2}{3}f(x)-xf'(x)$$

$$\Rightarrow\quad (x+1)f'(x)-\frac{2}{3}f(x)=3.$$

这是一阶线性方程,解之

$f(x)=C(x+1)^{2/3}-\frac{9}{2}$. 由题设 $f(0)=a_0=3$,得 $C=\frac{15}{2}$,

故 $f(x)=\frac{15}{2}(x+1)^{2/3}-\frac{9}{2}$.

2. 数项级数求和(重点)

(1) 定义法:

将 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的通项拆成 $a_n=b_{n+1}-b_n$,在求前 n 项过程中,除首尾项外,其余各项均消掉,即 $S_n=-b_1+b_{n+1}\to -b_1+b$,其中 $b_{n+1}\to b,n\to\infty$.

(2) 阿贝尔法(构造幂级数法)

设有数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$,构造一个相应的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,通过逐项微分或积分求出其和函数 $f(x)$,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.

注 在用逐项微分、积分求解 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $f(x)$ 的过程中,除 n 的阶乘:$n!$,$(2n)!$,$(2n+1)!$ 及以 n 为指数幂的因子之外,a_n 中其余的因子一定要消掉. 要消掉 a_n 中分子的因

子用逐项积分，分母中的因子用逐项微分.

【例 11.19】 求下列数项级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}$；$(a\neq 0)$　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n+1}{n!}$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$；　　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n-2}{3^n}$.

【解】 (1) $u_n=\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right],$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{a(a+1)}-\frac{1}{(a+1)(a+2)}\right)+\left(\frac{1}{(a+1)(a+2)}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a(a+1)}-\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\right]\to\frac{1}{2a(a+1)},(n\to\infty)$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{2a(a+1)}$.

(2) 作幂级数　$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}x^{2n}$,

$$f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x\frac{2n+1}{n!2^n}x^{2n}\mathrm{d}x\right)\right]'=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!2^n}\right]'=\left[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]'$$

$$=(xe^{\frac{x^2}{2}})'=e^{\frac{x^2}{2}}+xe^{\frac{x^2}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2x\right)=(1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}},$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!2^n}=\lim_{x\to 1^-}(1+x^2)e^{\frac{x^2}{2}}=2e^{\frac{1}{2}}$.

(3) 令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{2n+1}{n!}x^{2n}\mathrm{d}x\right]'$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right)'=(xe^{x^2})'=(1+2x^2)e^{x^2},$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1+2x^2)e^{x^2}=3e$.

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n-2}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$,

令　$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}x^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n(n+1)}{3^n}x^{n-1}\mathrm{d}x\right)$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}x^n\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{3^n}x^n\mathrm{d}x\right)''=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^n}\right)''$$

$$=\left[x\cdot\frac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}\right]''=\left(\frac{x^2}{3-x}\right)''=\frac{18}{(3-x)^3},$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}=\lim_{x\to1^-}\frac{18}{(3-x)^3}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4},\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$,

故 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+n-2}{3^n}=\frac{9}{4}-2\times\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}$.

题型 Ⅷ 付立叶级数

【解题提示】 (1) 记住两种形式的付立叶系数.

1° 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,在 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,2\pi]$ 上可积,则

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx\,(n=0,1,2,\cdots)$,

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx\,(n=1,2,\cdots)$.

2° 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数,且在 $[-l,l]$ 上可积,则

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中 $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\ (n=0,1,2,\cdots)$,

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\ (n=1,2,\cdots)$.

(2) 记住狄里赫莱收敛定理.

设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足条件:① $f(x)$ 除有限个第一类间断点外都是连续的;② 只有有限个极值点,则 $f(x)$ 的付立叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上收敛,且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}f(x),x\text{ 是 }f(x)\text{ 的连续点}\\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],x\text{ 为 }f(x)\text{ 的第一类间断点}\\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)],x=\pm\pi\end{cases},$$

其中 $f(x+0)=\lim_{x\to x^+}f(x)$, $f(x-0)=\lim_{x\to x^-}f(x)$.

(3) 解题程序:① 画出 $f(x)$ 的草图,并验证是否满足狄氏条件[画图目的:验证狄氏条件;由图可写出收敛域(若相邻两周期 $f(x)$ 的图形相连接,则收敛域是闭的,否则为开的);易看出奇偶性,可减少求系数的工作量];② 求出付立叶系数.注意当 $n=2$ 时,a_n 或 b_n 没有意义,则 a_0,a_1,a_2 或 b_1,b_2 要用定义重新求;③ 写出付立叶级数,并注明它在何处收敛于 $f(x)$.

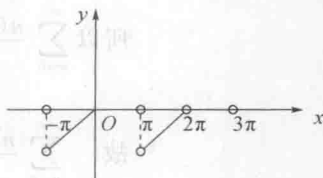
【例 11.20】 将 $f(x)=\begin{cases}x,-\pi\leqslant x\leqslant0\\0,0<x\leqslant\pi\end{cases}$ 展成付立叶级数.

【解】 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin x}{n}+\frac{\cos x}{n^2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi n^2}-\frac{\cos n\pi}{\pi n^2}$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(1-\cos n\pi) = \frac{1}{\pi n^2}[1-(-1)^n].$$

当 $n=0$ 时，a_n 的表达式没有意义，所以 a_0 必须另求：



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{\cos n\pi}{n} = \frac{(-1)^n}{n},$$

故　$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi n^2}[1-(-1)^n]\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right\}, x \in (-\pi,\pi).$

【例 11.21】　(1) 把 $f(x) = -x, -5 \leqslant x \leqslant 5$ 展成以 10 为周期的付氏级数；

(2) 把 $f(x) = 10 - x, 5 \leqslant x \leqslant 15$ 展成以 10 为周期的付氏级数；

(3) 把 $f(x) = -x, 0 \leqslant x \leqslant 5$ 展成以 10 为周期的正弦级数.

【解】　(1) 由 $f(x)$ 可知其为奇函数，所以 $a_n = 0, (k = 0,1,2,\cdots)$

$$b_n = \frac{2}{5}\int_0^5 f(x)\sin\frac{n\pi}{5}x\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\int_0^5(-x)\sin\frac{n\pi}{5}x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n\pi}x\cos\frac{n\pi}{5}x\Big|_0^5 - \frac{2}{n\pi}\int_0^5\cos\frac{n\pi}{5}x\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\cdot 5\cos n\pi = (-1)^n\frac{10}{n\pi},$$

又因为　$\frac{f(-5+0)+f(5-0)}{2} = 0 \neq \begin{cases} f(5) \\ f(-5) \end{cases},$

所以　$f(x) = -x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x, (-5,5).$

(2) $a_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi}{5}x\mathrm{d}x \xlongequal{令 u = 10-x} \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} u\cos\frac{(10-u)}{5}n\pi\mathrm{d}u = 0,$

$b_n = \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi}{5}x\mathrm{d}x \xlongequal{令 u = 10-x} \frac{1}{5}\int_5^{-5} u\sin\frac{n\pi}{5}u\mathrm{d}u = (-1)^n\frac{10}{n\pi},$

故　$10 - x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x, (5,15).$

(3) 把 $f(x) = -x, [0,5]$ 作奇开拓，$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ -f(-x), & -5 \leqslant x < 0 \end{cases},$

即　$F(x) = -x, -5 \leqslant x \leqslant 5$. 于是

$F(x) = -x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x, (-5,5),$

因为　当 $x \in [0,5)$ 时，$F(x) = f(x) = -x$,

所以　$f(x) = -x = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{5}x, [0,5).$

第十二章　常微分方程

题型 Ⅰ　可求解的一阶微分方程

【解题提示】　一阶可求解的方程有以下五类：

(1) 可分离变量方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(x)$ 或 $M_1(x)N_1(y)\mathrm{d}x+M_2(x)N_2(y)\mathrm{d}y=0$；

(2) 齐次方程：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，其特点为：方程右边为 $\frac{y}{x}$ 或 $\frac{x}{y}$ 的函数，或零次齐次函数（即方程右边的分子、分母的各项是由 x,y 的同次幂所构成）；

(3) 标准的一阶线性方程：$y'+p(x)y=q(x)$，“标准”是指 y' 前的系数为 1，“线性”是指 y,y' 的次数为 1；

(4) 伯努利方程：$y'+P(x)y=Q(x)y^n$，$(n\neq 0,1)$；

(5) 全微分方程：$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，其中 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

解题程序：① 审视给定的微分方程类型；② 根据不同的方程类型，采用相应的解题方案；③ 若解题过程中作过变量替换，最后一定要变量“还原”.

注　1°　方程中出现 $f(xy),f(x\pm y),f(x^2\pm y^2),f\left(\frac{y}{x}\right)\cdots$ 等形式的项，一定要作相应的变量替换：$u=xy,x\pm y,x^2\pm y^2,\frac{y}{x}$；

2°　$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，先化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，分析是否为分离变量方程或齐次方程，若不是，再通过验证 $\frac{\partial P}{\partial y}\doteq\frac{\partial Q}{\partial x}$ 确定是否为全微分方程；

3°　一阶线性方程一定要先“标准化”，即使 y' 前的系数为 1.

【例 12.1】　求解下列微分方程：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2+y^2+2xy}$；　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$.

【解】　(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{(x+y)^2}$，令 $u=x+y$，则将 $u'_x=1+y'_x$ 代入方程，得 $y'_x=u'_x-1=\frac{1}{u^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2+1}{u^2}\Rightarrow\frac{u^2}{u^2+1}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\Rightarrow u-\arctan u=x+C$，故原方程的解为

$x+y-\arctan(x+y)=x+C$，

即　$y=\arctan(x+y)+C$.

(2) 令 $\frac{y^2}{x}=u$，$y^2=ux$，则 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，代入方程得

$\frac{\mathrm{d}u}{\tan u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow\ \ln\sin u=\ln x+\ln C+\ \Rightarrow\ \sin u=Cx$，

故原方程通解：$\sin\frac{y^2}{x}=Cx$.

【例 12.2】　解下列微分方程：

(1) $x(\ln x-\ln y)\mathrm{d}y-x\mathrm{d}x=0$；　(2) $(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$；

(3) $y'=\dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$.

【解】　(1) 原方程变为　$x\ln\dfrac{x}{y}\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x\ln\dfrac{x}{y}}=\frac{\dfrac{y}{x}}{\ln\dfrac{x}{y}},$$

令　$y=ux, y'_x=u+xu'_x$ 代入方程，得

$$u+xu'_x=\frac{u}{\ln\dfrac{1}{u}}\Rightarrow xu'_x=-u-\frac{u}{\ln u}\Rightarrow -\frac{\ln u\mathrm{d}u}{u(1+\ln u)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Rightarrow\quad -\left(1-\frac{1}{1+\ln u}\right)\mathrm{d}(\ln u)=\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad\Rightarrow\quad -[\ln u-\ln(1+\ln u)]=\ln x+\ln C$$

$$\xrightarrow{\text{变量还原}}Cy=1+\ln\frac{y}{x}.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})}{x-y}=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}}{\dfrac{x}{y}-1}$，令 $u=\dfrac{x}{y}$，则 $x=uy$，

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，原方程变为 $u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\dfrac{u-1}{1+\mathrm{e}^{-u}}$

$$\Rightarrow\quad \frac{1+\mathrm{e}^u}{u+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u+\frac{\mathrm{d}y}{y}=0\quad\Rightarrow\quad \ln(\mathrm{e}^u+u)+\ln y=\ln C$$

$\Rightarrow\quad y(u+\mathrm{e}^u)=C$，变量还原，得 $y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x=C$.

(3) 解方程组 $\begin{cases}-x+2y-5=0\\2x-y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$，

令 $z=x+1, y=y-2$，代入原方程，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{2y-z}{2z-y}=\frac{2y/z-1}{2-y/z}，令\quad \frac{y}{z}=u,$$

$y=uz$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=u+z\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$，代入得

$$u+z\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}=\frac{2u-1}{2-u}\quad\Rightarrow\frac{2-u}{u^2-1}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$\Rightarrow\quad \left(-\frac{1}{1+u}+\frac{1}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}z}{z}\quad\Rightarrow\quad \frac{1-u}{u(1+u)}=Cz$$

$\Rightarrow\quad z-y=Cy(z+y)$，

变量还原，得　$x-y+3=C(y-2)(x+y-1)$.

【例 12.3】　解下列微分方程：

(1) $(1+x)y'-ny=(x+1)^{n+1}x\sin(x^2)$；　(2) $y'=\dfrac{y^2}{y^2+2xy-x}$；

(3) $(x-\sin y)\mathrm{d}y+\tan y\mathrm{d}x=0, y\Big|_{x=1}=0$.

【解】 (1) 化为标准化方程：$y' - \frac{n}{x+1}y = (x+1)^n x\sin(x^2)$，　　(＊)

①$y' = \frac{n}{x+1}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{n}{x+1}dx \Rightarrow \ln y = n\ln(x+1) + \ln C$

$\Rightarrow y = C(x+1)^n$

② 令　$y = C(x)(x+1)^n$ 为方程(＊)的解，将其代入并整理，得

$C'(x)(x+1)^n = (x+1)^n x\sin(x^2) \Rightarrow C'(x) = x\sin(x^2)$

$\Rightarrow C(x) = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + \tilde{C}$.

故原方程的通解　$y = \left(-\frac{1}{2}\cos|x^2| + \tilde{C}\right)(x+1)^n$.

(2) 将 x 看作 y 的函数，于是

$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + 2xy - x}{y^2} = \frac{2y-1}{y^2}x + 1$ ——一阶线性方程((＊)).

① $\frac{dx}{dy} = \frac{2y-1}{y^2}x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy$

$\Rightarrow \ln x = 2\ln y + \frac{1}{y} + \ln C \Rightarrow x = Cy^2 e^{\frac{1}{y}}$.

② 令 $x = C(y)y^2 e^{\frac{1}{y}}$ 为((＊))的解，将其代入并整理，

$C'(y)y^2 e^{\frac{1}{y}} = 1 \Rightarrow C'(y) = \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}$

$\Rightarrow C(y) = \int \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}dy + \tilde{C} = \int e^{-\frac{1}{y}}d\left(-\frac{1}{y}\right) + \tilde{C} = e^{-\frac{1}{y}} + \tilde{C}$,

故原方程的通解 $x = (e^{-\frac{1}{y}} + \tilde{C})y^2 e^{\frac{1}{y}} = y^2 + \tilde{C}y^2 e^{\frac{1}{y}}$.

(3) $(x - \sin y)dy + \frac{\sin y}{\cos y}dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\cos y(\sin y - x)}$

$\Rightarrow \frac{d(\sin y)}{dx} = \frac{\sin y}{\sin y - x}$，把 x 看作 $\sin y$ 的函数得

$\frac{dx}{d(\sin y)} = \frac{\sin y - x}{\sin y}$，　令 $u = \sin y$，于是

$\frac{dx}{du} = 1 - \frac{1}{u}x$ ——一阶线性方程，　　(＊＊)

① $\frac{dx}{du} = -\frac{x}{u} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{du}{u} \Rightarrow \ln x = -\ln u + \ln C \Rightarrow x = \frac{C}{u}$,

② 令 $x = \frac{1}{u}C(u)$ 为方程(＊＊)的解，将其代入并整理得

$\frac{1}{u}C'(u) = 1 \Rightarrow C'(u) = u \Rightarrow C(u) = \frac{1}{2}u^2 + \tilde{C}$,

方程(＊＊)的通解为 $x = \left(\frac{1}{2}u^2 + \tilde{C}\right)\frac{1}{u}$,

故原方程的解　$x = \left(\frac{1}{2}\sin^2 y + \tilde{C}\right)\frac{1}{\sin y}$.

将初始条件：$y\Big|_{x=1} = \frac{\pi}{6}$ 代入，得 $\tilde{C} = \frac{3}{8}$,

所求特解：$x=\left(\frac{1}{2}\sin^2 y+\frac{3}{8}\right)\frac{1}{\sin y}$.

【解 12.4】 解下列微分方程：

(1)$(2xy^2-y)dx+xdy=0$； (2)$\cos y\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}\sin y=e^x\sin^2 y$.

【解】 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y-2y^2$ —— 伯努利方程

$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}y^{-1}-2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(y^{-1})=-\frac{1}{x}y^{-1}+2$.

令 $y^{-1}=z$，则方程变为 $z'_x=-\frac{1}{x}z+2$， （*）

① $\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln z=-\ln x+\ln c \quad \Rightarrow \quad z=\frac{C}{x}$,

② 令 $z=\frac{1}{x}C(x)$ 为（*）的解，将其代入并整理，得

$$\frac{1}{x}C'(x)=2,\quad C(x)=x^2+\widetilde{C},$$

故原方程的解 $y^{-1}=(x^2+\widetilde{C})\frac{1}{x}$.

(2) 原方程 $\Rightarrow \frac{d(\sin y)}{dx}-\frac{1}{x}\sin y=e^x\sin^2 y$,

令 $z=\sin y$，则 $\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z=e^x z^2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x}z^{-1}=e^x \quad \Rightarrow \quad -\frac{d}{dx}(z^{-1})-\frac{1}{x}z^{-1}=e^x$.

令 $z^{-1}=u$，则方程变为 $\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=-e^x$， （* *）

① $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u}=-\frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \ln u=-\ln x+\ln C \quad \Rightarrow \quad u=\frac{C}{x}$,

② 令 $u=\frac{C(x)}{x}$ 为（* *）的解，代入并整理，得

$\frac{C'(x)}{x}=-e^x \quad \Rightarrow \quad C'(x)=-xe^x \quad \Rightarrow \quad C(x)=(1-x)e^x+\widetilde{C}$,

方程（* *）的通解：$u=\frac{1}{x}[(1-x)e^x+\widetilde{C}]$,

故原方程的通解 $(\sin y)^{-1}=\frac{1}{x}[(1-x)e^x+\widetilde{C}]$.

【例 12.5】 求解下列微分方程：

(1)$(3x^2+2xe^{-y})dx+(3y^2-x^2e^{-y})dy=0$；

(2)$(xy+\sqrt{1-x^2y^2})dx+x^2dy=0$；

(3)$\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$.

【解题提示】　全微分方程的解法有三种：① 原函数法；② 曲线积分法；③ 分项组合法. 分项组合法即先把方程中那些本身已构成全微分的项分出，再将剩余的项凑成全微分，是非常重要的方法，不仅可以求解全微分方程，而且还可以从中发现非全微分方程的解题契机. 要熟练掌握这种方法必须牢记以下公式：

$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=\mathrm{d}(xy)$	$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)$	$\frac{x\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$
$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$	$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$	$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right)$

【解】　(1) $P(x,y)=3x^2+2x\mathrm{e}^{-y},Q(x,y)=3y^2-x^2\mathrm{e}^{-y}$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\mathrm{e}^{-y},\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x\mathrm{e}^{-y}$，所以$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

可知　该方程为全微分方程，本题分别用原函数法及分项组合法做.

设　$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\equiv P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，

$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+2x\mathrm{e}^{-y}\xrightarrow{\text{对 }x\text{ 积分}}u=x^3+x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi(y)$（待求），

将求得的 u 的表达式两边对 y 求偏导，得

$-x^2\mathrm{e}^{-y}+\varphi'(y)=Q(x,y)=3y^2-x^2\mathrm{e}^{-y}\quad\Rightarrow\quad\varphi'(y)=3y^2\quad\Rightarrow\quad\varphi(y)=y^3$，

故　微分方程的通解为　$x^3+x^2\mathrm{e}^{-y}+y^3=C$.

用分项组合法解：显然方程中的 $3x^2\mathrm{d}x,3y^2\mathrm{d}y$ 是已构成全微分的项，而 $2x\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x-x^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$ 可凑成 $\mathrm{d}(x^2\mathrm{e}^{-y})$. 故原方程可写成

$\mathrm{d}(x^3)+\mathrm{d}(y^3)+\mathrm{d}(x^2\mathrm{e}^{-y})=0\quad\Rightarrow\quad x^3+y^3+x^2\mathrm{e}^{-y}=C$.

(2) $P(x,y)=xy+\sqrt{1-x^2y^2},Q(x,y)=x^2$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=x-\frac{yx^2}{\sqrt{1-x^2y^2}}$，　　$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$，

可知方程不是全微分方程，用分项组合法求解.

方程变形为$\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-(xy)^2}}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}(xy)}{\sqrt{1-(xy)^2}}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0$

$\Rightarrow\quad\arcsin(xy)+\ln x=C.$

(3)* 　$P(x,y)=1-\frac{y}{x^2+y^2},Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，　$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，当 $x^2+y^2\neq0$ 时，$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$.

故可用所介绍的三种方法求解. 本题用曲线积分法做.

$$u(x,y)=\int_{L(0,1)}^{(x,y)}\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}=0+\int_0^x\left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=x-\arctan\frac{x}{y}\Big|_0^x=x-\arctan\frac{x}{y}.$$

故该方程的通解为：$x-\arctan\frac{x}{y}=C$.

题型 Ⅱ　可降阶的高阶微分方程的解法

【解题提示】　只有以下三种类型.

(1) $y^{(n)}=f(x)$.

解法：积分 n 次即可得，注意每积分一次要加一个常数.

(2) 不显含 y 的二阶方程　$y''=f(x,y')$.

解法：令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程 $\Rightarrow p'=f(x,p)$，再求解.

(3) 不显含 x 的二阶方程　$y''=f(y,y')$.

解法：令 $y'=p$，将 y 当做自变量，则 $y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，原方程 $\Rightarrow p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$，再求解.

【例 12.6】　求解下列微分方程：

(1) $x^2y''=(y')^2+2xy'$；　　(2) $yy''-(y')^2+(y')^3=0$；

(3) $yy''-y'^2=y^2\ln y$.

【解】　(1) 这是不显含 y 的方程. 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，

于是　原方程 $\Rightarrow x^2p'=p^2+2xp \;\Rightarrow\; p'=\frac{2}{x}p+\frac{1}{x^2}p^2$ —— 伯努利方程

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{p^2}p'=\frac{2}{x}p^{-1}+\frac{1}{x^2}\quad\Rightarrow\quad -\frac{\mathrm{d}(p^{-1})}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{x}p^{-1}+\frac{1}{x^2}\text{，令}\quad p^{-1}=z,$$

则变为　$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{2}{x}z-\frac{1}{x^2}$.　　㊉

① $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{2}{x}z \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{2}{x}\mathrm{d}x,\ \ln z=-2\ln x+\ln C,\ z=\frac{C}{x^2}$,

② 令 $z=\frac{C(x)}{x^2}$ 为方程㊉的解，将其代入并整理，得

$$\frac{C'(x)}{x^2}=-\frac{1}{x^2}\;\Rightarrow\; C'(x)=-1\;\Rightarrow\; C(x)=-x+\tilde{C}_1,$$

故方程㊉，即伯努利方程的通解 $p^{-1}=\frac{1}{x^2}(-x+\tilde{C}_1)$,

即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2}{-x+\tilde{C}_1}=-(\tilde{C}_1+x)-\frac{\tilde{C}_1^2}{x-\tilde{C}_1}$

$$\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{2}(x+\tilde{C}_1)^2-\tilde{C}_1^2\ln|x-\tilde{C}_1|+C_2.$$

(2) 这是不显含 x 的方程，令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,

于是　原方程 $\Rightarrow yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2+p^3=0 \;\Rightarrow\; p\left(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p+p^2\right)=0$

$$\Rightarrow\quad p=0\quad\text{或}\quad y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p+p^2=0,$$

由 $p=0 \;\Rightarrow\; y=C$,

由 $y\dfrac{dp}{dy}=p-p^2 \Rightarrow \dfrac{dp}{p(1-p)}=\dfrac{dy}{y}\overset{积分}{\Rightarrow}\dfrac{p}{1-p}=C_1y$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{C_1y}{1+C_1y} \Rightarrow \dfrac{1+C_1y}{C_1y}dy=dx \overset{积分}{\Rightarrow} y+\dfrac{1}{C_1}\ln y=x+C_2.$

(3) 这是不显含 x 的方程，若按常规作法将比较繁. 原方程 $\Rightarrow \dfrac{yy''-y'^2}{y^2}=\ln y \Rightarrow \left(\dfrac{y'}{y}\right)'=\ln y$，即　$(\ln y)''=\ln y$，令 $\ln y=z$，则 $z''=z$，这是二阶常系数线性齐次方程.

其特征方程：$\lambda^2=1$，$\lambda=\pm 1$，则其通解为 $z=C_1e^x+C_2e^{-x}$，

故　原方程通解为 $\ln y=C_1e^x+C_2e^{-x}$.

题型 Ⅲ　高阶常系数线性微分方程的解法

【解题提示】 1. 二阶常系数线性齐次方程

$y''+a_1y'+a_2y=0$，　①

其特征方程　$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$.　②

1°　若 λ_1,λ_2 为相异的特征根，则方程 ① 的通解　$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$；

2°　若 $\lambda_1=\lambda_2=k$，则方程 ① 的通解　$y=(C_1+C_2x)e^{kx}$；

3°　若 $\lambda=\alpha\pm i\beta$，α,β 为实数，则方程 ① 的通解　$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

2. 二阶常系数线性非齐次方程

$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$.　③

非齐次方程 ③ 的通解 = ③ 对应的齐次方程 ② 的通解 $+y^*(x)$，其中 $y^*(x)$ 为 ③ 的一个特解，其求解有：1° 待定系数法；2° 拉普拉斯变换法；3° 微分算子法. 下面介绍最快速简便的微分算子法.

引入微分算子 $\dfrac{d}{dx}=D$，则 $\dfrac{dy}{dx}=Dy$；$\dfrac{d^2}{dx^2}=D^2$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=D^2y$，

于是方程 ③ $\Rightarrow (D^2+a_1D+a_2)y=f(x)$.　④

令　$F(D)=D^2+a_1D+a_2$，则 ④ $\Rightarrow F(D)y=f(x) \Rightarrow y^*=\dfrac{1}{F(D)}f(x)$，

$\dfrac{1}{F(D)}$ 的重要性质：

1°　$\dfrac{1}{F(D)}e^{kx}=\dfrac{1}{F(k)}e^{kx}$，$F(k)\neq 0$，

当 $F(k)=0$ 时，$\dfrac{1}{F(D)}e^{kx}=x\dfrac{1}{F'(D)}e^{kx}=x\dfrac{1}{F'(k)}e^{kx}$，$F'(k)\neq 0$；

若 $F'(k)=0$，则 $\dfrac{1}{F(D)}e^{kx}=x^2\dfrac{1}{F''(D)}e^{kx}=\dfrac{1}{2}x^2e^{kx}$.

2°　$\dfrac{1}{F(D^2)}\sin ax=\dfrac{1}{F(-a^2)}\sin ax$，$F(-a^2)\neq 0$，

$\dfrac{1}{F(D^2)}\cos ax=\dfrac{1}{F(-a^2)}\cos ax$，$F(-a^2)\neq 0$，

当 $F(-a^2)=0$ 时，则　$\dfrac{1}{F(D^2)}\sin ax=x\dfrac{1}{F'(D^2)}\sin ax$，$\dfrac{1}{F(D^2)}\cos ax=x\dfrac{1}{F'(D^2)}\cos ax$.

3° $\dfrac{1}{F(D)}e^{kx}v(x)=e^{kx}\dfrac{1}{F(D+k)}v(x)$.

4° $\dfrac{1}{F(D)}(b_0x^p+b_1x^{p-1}+\cdots+b_p)=Q(D)(b_0x^p+b_1x^{p-1}+\cdots+b_p)$,

其中$Q(D)$为1除以$F(D)$按升幂排列所得商式，其D的最高次数为右边多项式的最高次数p.
1除以$F(D)$的运算如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{a_2}-\frac{a_1}{a_2^2}D+\cdots \\
a_2+a_1D+D^2 & 1 \\
 & 1+\frac{a_1}{a_2}D+\frac{1}{a_2}D^2 \\
 & -\frac{a_1}{a_2}D-\frac{1}{a_2}D^2 \\
 & -\frac{a_1}{a_2}D-\frac{a_1^2}{a_2^2}D^2-\frac{a_1}{a_2^2}D^3 \\
 & \frac{a_1^2-a_2}{a_2^2}D^2+\frac{a_1}{a_2^2}D^3
\end{array}
$$

其中 $Q(D)=\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{a_1}{a_2^2}D+\cdots$

注：1° D表示微分，$\dfrac{1}{D}$表示积分.

2° $\dfrac{1}{D^{2n+1}}\sin ax=\dfrac{1}{D^{2n}D}\sin ax=\dfrac{1}{(-a^2)^n}\dfrac{1}{D}\sin ax=(-1)^{n+1}\dfrac{\cos ax}{a^{2n+1}}$,

$\dfrac{1}{D^{2n+1}}\cos ax=\dfrac{1}{D^{2n}D}\cos ax=\dfrac{1}{(-a^2)^n}\cdot\dfrac{1}{D}\cos ax=(-1)^n\dfrac{\sin ax}{a^{2n+1}}$,

由此 $\dfrac{1}{F(D)}\sin ax$，$\dfrac{1}{F(D)}\cos ax$ 便可运算了，例如

$$\frac{1}{D^2+2D-1}\sin 2x=\frac{1}{(-2^2)+2D-1}\sin 2x=\frac{1}{2D-5}\sin 2x=\frac{2D+5}{(2D-5)(2D+5)}\sin 2x$$

$$=\frac{2D+5}{4D^2-25}\sin 2x=\frac{2D+5}{4(-2^2)-25}\sin 2x=-\frac{1}{41}(2D+5)\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{41}(4\cos 2x+5\sin 2x).$$

【例 12.7】 求下列方程的特解：

(1) $y''+2y'-3y=e^{2x}$；　(2) $y''-2y'+y=e^x$；

(3) $y''+4y'+5y=\sin 2x$；　(4) $y''+4y=\cos 2x$.

【解】 (1) 由$\dfrac{1}{F(D)}$的性质1°，有 $y^*=\dfrac{1}{D^2+2D-3}e^{2x}=\dfrac{1}{5}e^{2x}$.

(2) 由$\dfrac{1}{F(D)}$的性质1°的特殊情况有

$$y^*=\frac{1}{D^2-2D+1}e^x=x\frac{1}{2D-2}e^x=x^2\frac{1}{2}e^x=\frac{1}{2}x^2e^x.$$

(3) $y^*=\dfrac{1}{D^2+4D+5}\sin 2x=\dfrac{1}{(-2^2)+4D+5}\sin 2x=\dfrac{1}{4D+1}\sin 2x$

$$=\frac{4D-1}{(4D+1)(4D-1)}\sin 2x=\frac{4D-1}{16D^2-1}\sin 2x=-\frac{1}{65}(4D-1)\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{65}(8\cos 2x-\sin 2x).$$

$$(4)\ y^{*}=\frac{1}{D^{2}+4}\cos 2x=x\frac{1}{2D}\cos 2x=\frac{x}{2}\frac{D}{D^{2}}\cos 2x=\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

【例 12.8】 求下列方程的特解：

(1) $y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^{2x}$；　　(2) $y''-2y'+3y=x^{2}-x+2$；

(3) $y''-y'+3y=\mathrm{e}^{x}\sin x$；　　(4) $y''-3y'=x+3$.

【解】 (1) 由 $\frac{1}{F(D)}$ 的性质 3°，有

$$y^{*}=\frac{1}{D^{2}-3D+2}x\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{(D+2)^{2}-3(D+2)+2}x=\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{D^{2}+D}x$$

$$=\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{D(D+1)}x=\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{D+1}x=\mathrm{e}^{2x}\frac{1}{D}(1-D)x=\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{D}-1\right)x$$

$$=\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2}x^{2}-x\right)=\frac{1}{2}x(x-2)\mathrm{e}^{2x}.$$

$$(2)\ y^{*}=\frac{1}{D^{2}-2D+3}(x^{2}-x+2)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}D+\frac{2}{9}D+\frac{1}{27}D^{2}\right)(x^{2}-x+2)$$

$$=\frac{1}{3}(x^{2}-x+2)+\frac{2}{9}(2x-1)+\frac{2}{27}=\frac{1}{3}x^{2}+\frac{1}{9}x+\frac{14}{27}.$$

$$(3)\ y^{*}=\frac{1}{D^{2}-D+3}\mathrm{e}^{x}\sin x=\mathrm{e}^{x}\frac{1}{(D+1)^{2}-(D+1)+3}\sin x=\frac{1}{D^{2}+D+3}\sin x$$

$$=\frac{1}{-1^{2}+D+3}\sin x=\frac{D-2}{(D+2)(D-2)}\sin x=\frac{D-2}{D^{2}-4}\sin x$$

$$=-\frac{1}{5}(D-2)\sin x=-\frac{1}{5}(\cos x-2\sin x).$$

$$(4)\ y^{*}=\frac{1}{D^{2}-3D}(x+3)=\frac{1}{D}\frac{1}{D-3}(x+3)=\frac{1}{D}\left(-\frac{1}{3}-\frac{D}{9}\right)(x+3)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{D}-\frac{1}{9}\right)(x+3)=-\left(\frac{1}{6}x^{2}+\frac{10}{9}x+\frac{1}{3}\right).$$

【例 12.9】 设二阶常系数线性方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\mathrm{e}^{x}$ 的一个特解为 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}$，试确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解.

【解】 将 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}$ 代入方程，得

$$(4+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^{2x}+(3+2\alpha+\beta)\mathrm{e}^{x}+(1+\alpha+\beta)x\mathrm{e}^{x}=\gamma\mathrm{e}^{x},$$

比较两边同次项的系数有

$$\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\ 3+2\alpha+\beta=\gamma.\ \text{解之，得}\ \alpha=-3,\beta=2,\gamma=-1,\\ 1+\alpha+\beta=0\end{cases}$$

故原方程为　$y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^{x}$，

其特征方程　$\lambda^{2}-3\lambda+2=0\ \Rightarrow\ \lambda_{1}=1,\lambda_{2}=2$，

对应齐次方程通解为　$Y(x)=C_{1}\mathrm{e}^{x}+C_{2}\mathrm{e}^{2x}$，

故原方程的通解为　$y=C_{1}\mathrm{e}^{x}+C_{2}\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}=\widetilde{C}_{1}\mathrm{e}^{x}+\widetilde{C}_{2}\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{x}$.

【例 12.10】 设 $y_{1}=x,y_{2}=x+\mathrm{e}^{2x},y_{3}=x(1+\mathrm{e}^{2x})$ 是二阶常系数线性非齐次方程的特

解，求该微方程的通解及该方程.

【解】 设所求的二阶常系数线性非齐次方程为

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x),\qquad ①$$

对应的齐次方程为 $y''+a_1y'+a_2y=0$. ②

由非齐次与齐次方程解的关系，可知 $y_2-y_1=e^{2x}, y_3-y_1=xe^{2x}$ 是方程 ② 的解.

又 $\dfrac{xe^{2x}}{e^{2x}}=x\neq k$(常数),

故方程 ② 的通解为 $Y(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=(C_1+C_2x)e^{2x}$.

由非齐次方程解的结构定理，其通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+x$.

再求方程 ①.

由齐次方程 ② 通解的形式可知 $\lambda=2$ 为特征方程 $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ 的重根，由根与系数的关系可得 $a_1=-4, a_2=4$，于是方程 ①$\Rightarrow y''-4y'+4y=f(x)$. ③

因为 $y_1=x$ 为其解，所以 $(x)''-4(x)'+4x\equiv f(x) \Rightarrow f(x)=4(x-1)$.

故所求方程为 $y''-4y'+4y=4(x-1)$.

【例 12.11】 设 $y''+2my'+n^2y=0, y(0)=a, y'(0)=b$. 求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$(其中 a,b,m,n 均为常数，$m>n>0$).

【解】 特征方程为 $\lambda^2+2m\lambda+n^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-m\pm\sqrt{m^2-n^2}$,

原方程通解为 $y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$，由初始条件，有

$C_1+C_2=a,\quad \lambda_1C_1+\lambda_2C_2=b$,

$$故\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}(C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x})dx=-\left(\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}\right)$$

$$=-\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}[(\lambda_1+\lambda_2)(C_1+C_2)-(\lambda_1C_1+\lambda_2C_2)]$$

$$=-\frac{1}{n^2}(-2ma-b)=\frac{1}{n^2}(2ma+b).$$

【例 12.12】 设有级数 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,

(1) 求此级数的收敛域；(2) 证明此级数满足方程 $y''-y=-1$；

(3) 求此级数的和函数.

【解】 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x^{2(n+1)}|}{[2(n+1)]!}\cdot\dfrac{(2n)!}{|x|^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}=0$,

所以收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 令 $y(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$，则 $y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

因为 $y''-y=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right)-\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right)=-1$,

所以该级数满足方程.

(3) 由级数的和函数 $y(x), y'(x)$ 可知 $y(0)=2, y'(0)=0$，故可知满足 $y(0)=2$,

$y'(0)=0$ 的方程 $y''-y=-1$ 的特解，即为级数的和函数.

由 $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=\pm1$，得出对应齐次方程通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$，

非齐次方程的一个特解 $y^*=\frac{1}{D^2-1}(-1)=-\frac{1}{D^2-1}e^{0x}=1$，

故非齐次方程的通解 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+1$.

代入 $y(0)=2,y'(0)=0$ 可确定出 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，

故 $2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})+1$.

题型 Ⅳ* 欧拉方程的解法

【解题提示】 欧拉方程：$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$ 其特点为各项未知函数导数的阶数恰等于与之相乘的自变量的方次数.

解法程序：① 作变量替换 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，

把 y 看作 t 的函数，则

$xy'=\frac{dy}{dt}=Dy$，

$x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=D(D-1)y$，

… …

$x^ny^n=D(D-1)\cdots(D-n+1)y$，

于是欧拉方程化为 $P_n(D)y=f(e^t)$；

② 求常系数方程 $P_n(D)y=f(e^t)$ 的解 $y=y(t)$；

③ 变量还原，得欧拉方程的通解 $y=y(\ln x)$.

【例 12.13】 求解下列欧拉方程：

(1) $x^2y''-3xy'+3y=x^3$；　(2) $x^2y''-6xy'-8y=x\ln x$.

【解】 (1) 令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，于是原方程 $\Rightarrow$

$[D(D-1)-3D+3]y=e^{3t}$，即 $(D^2-4D+3)y=e^{3t}$，

特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=3$，

$y^*=\frac{1}{D^2-4D+3}e^{3t}=t\frac{1}{2D-4}e^{3t}=\frac{1}{2}te^{3t}$，

故原方程的通解 $y=C_1e^t+C_2e^{3t}+\frac{1}{2}te^{3t}=C_1x+C_2x^3+\frac{1}{2}x^3\ln x$.

(2) 令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，于是原方程 $\Rightarrow$

$[D(D-1)-6D-8]y=te^t$，即 $(D^2-7D-8)y=te^t$，

特征方程为 $\lambda^2-7\lambda-8=(\lambda+1)(\lambda-8)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\lambda_2=8$，

$$y^*=\frac{1}{D^2-7D-8}e^t\cdot t=e^t\frac{1}{(D+1)^2-7(D+1)-8}t=e^t\frac{1}{D^2-5D-14}t$$

$$=e^t\left(-\frac{1}{14}+\frac{5}{14^2}D\right)t=\frac{1}{14}\left(\frac{5}{14}-t\right)e^t.$$

故原方程通解为 $y=C_1e^{-t}+C_2e^{8t}+\frac{1}{14}\left(\frac{5}{14}-t\right)e^t$

$$=\frac{C_1}{x}+C_2x^8+\frac{1}{14}\left(\frac{5}{14}-\ln x\right)x.$$

题型 V* 一阶常系数线性方程组的解法

【解题提示】 (1) 齐次方程组 $\begin{cases}x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{cases}$. ①

解题程序：

1° 引入微分算子 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则(1)$\Rightarrow\begin{cases}(D-a_{11})x_1-a_{12}x_2=0\\-a_{21}x_1+(D-a_{22})x_2=0\end{cases}$； ②

2° 令 $\Delta(D)=\begin{vmatrix}D-a_{11}&-a_{12}\\-a_{21}&D-a_{22}\end{vmatrix}$，则 $x_1(t),x_2(t)$ 满足：

$\Delta(D)x_1=0,\Delta(D)x_2=0$，

求解 $\Delta(D)x_1=0$（或 $\Delta(D)x_2=0$）；

3° 将解出的 $x_1(t)$（或 $x_2(t)$）代入方程组 ① 中的第一个方程，求出 $x_2(t)$（或第二个方程求出 $x_1(t)$）即得方程组的通解.

注 求出其中一个解，再求另一个解时，宜用代数法，不要用积分法，这可避免处理两次积分后出现的任意常数间的关系.

(2) 非齐次方程组的解法 $\begin{cases}x'_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\varphi(t)\\x'_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\psi(t)\end{cases}$. ③

方程组 ③ 的通解 = 对应的齐次方程 ① 的通解 + 非齐次方程组 ③ 的一个特解.

【例 12.14】 求解下列微分方程组：

(1) $\begin{cases}x'=x-y\\y'=x+3y\end{cases}$； (2) $\begin{cases}x'=-x-2y+2\mathrm{e}^{-t}\\y'=3x+4y+\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$.

【解】 (1) 引入算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=D$，于是方程组变为

$$\begin{cases}(D-1)x+y=0\\-x+(D-3)y=0\end{cases},\quad \Delta(D)=\begin{vmatrix}D-1&+1\\-1&D-3\end{vmatrix}=(D-2)^2,$$

$(D-2)^2x=0$，其特征方程 $(\lambda-2)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=2$，

于是 $x=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{2t}$，将其代入第一个方程，得

$$\begin{aligned}y&=-Dx+x=-D[C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2t\mathrm{e}^{2t}]+(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{2t}\\&=-2C_1\mathrm{e}^{2t}-C_2\mathrm{e}^{2t}-2C_2t\mathrm{e}^{2t}+C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2t\mathrm{e}^{2t}\\&=-(C_1+C_2)\mathrm{e}^{2t}-C_2t\mathrm{e}^{2t}=-[C_1(t+1)+C_2]\mathrm{e}^{2t},\end{aligned}$$

故方程组的通解 $\begin{cases}x=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{2t}\\y=-[C_1(t+1)+C_2]\mathrm{e}^{2t}\end{cases}$.

(2) 引入算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=D$. 于是方程组变为

$$\begin{cases}(D+1)x+2y=2\mathrm{e}^{-t}\\-3x+(D-4)y=\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$$，用克莱姆法则解之，

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2e^{-t} & 2\\ e^{-t} & D-4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D+1 & 2\\ -3 & D-4\end{vmatrix}}=\frac{-12e^{-t}}{D^2-3D+2},\qquad ⊛$$

⊛ 的特征方程为　$\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=2$,

⊛ 的一个特解 $x^*=-12\dfrac{1}{D^2-3D+2}e^{-t}=-2e^{-t}$,

故方程 ⊛ 的通解：$x=C_1e^t+C_2e^{2t}-2e^{-t}$.

将其代入方程组的第一个方程，得

$$y=\frac{1}{2}(2e^{-t}-x-x')=\frac{1}{2}(2e^{-t}-C_1e^t-C_2e^{2t}+2e^{-t}-C_1e^t-2C_2e^{2t}-2e^{-t})$$

$$=e^{-t}-C_1e^t-\frac{3}{2}C_2e^{2t},$$

故方程组的通解为 $\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{2t}-2e^{-t}\\ y=-C_1e^t-\dfrac{3}{2}C_2e^{2t}+e^{-t}.\end{cases}$

题型 Ⅵ　微分方程在几何和力学中的应用

【解题提示】　1.微分方程在几何中的应用.

解题程序：① 根据题设画出草图；② 利用图形特点及相关的一些概念及公式列方程；③ 解方程.相关的概念及公式列举如下.

在直角坐标系下：

过(x,y)的切线方程：$Y-y=\dfrac{dy}{dx}(X-x)$；

过(x,y)的法线方程：$Y-y=-\dfrac{dx}{dy}(X-x)$；

弧微分：$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$；

面积微分：$dA=y\,dx$ 或 $x\,dy$；

在极坐标系下：弧微分：　$dl=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$；

　　面积微分：$dA=\dfrac{1}{2}\rho^2 d\theta$；

一个重要关系：$\tan\varphi=\rho\dfrac{d\theta}{d\rho}$（其中 φ 表示极径与点(ρ,θ)处切线间的夹角）.

【例 12.15】　求一曲线，使其上每点的向径与切线间的夹角等于切线斜角的$\dfrac{1}{3}$.

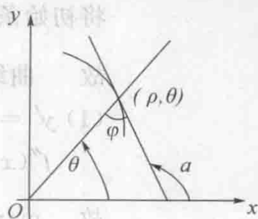


图 12.1

【解】　按题意画一草图（图 12.1）.由题设有

$\varphi=\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{\varphi+\theta}{3}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\theta}{2}$,

由公式 $\tan\varphi=\rho\dfrac{d\theta}{d\rho}$，于是

$$\tan\frac{\theta}{2}=\rho\frac{d\theta}{d\rho}\quad\Rightarrow\quad\frac{d\rho}{\rho}=\frac{d\theta}{\tan\frac{\theta}{2}}\overset{\text{积分}}{\Rightarrow}\ln\rho=2\ln\sin\frac{\theta}{2}+\ln C$$

$$\Rightarrow\quad\rho=C\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}C(1-\cos\theta).$$

【例 12.16】 设曲线 $y=f(x)$ 为连接 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 两点的曲线，位于弦 AB 的上方，$P(x,y)$ 为其上任一点，弦 BP 与该曲线围成的面积为 x^3，求该曲线.

【解】 由题意及图形可看出，图 12.2 中阴影部分的面积等于曲边梯形 $BPCO$ 的面积减去直边梯形 $BPCO$ 的面积，即

$$\int_0^x f(x)dx-\frac{1}{2}x[1+f(x)]=x^3$$

$$\xrightarrow{\text{两边求导}}\quad f(x)-\frac{1}{2}[1+f(x)]-\frac{1}{2}xf'(x)=3x^2$$

$$\Rightarrow\quad f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-6x-\frac{1}{x},$$

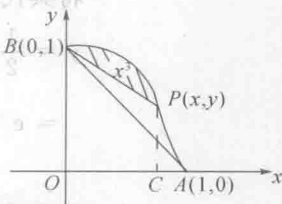


图 12.2

这是一阶线性方程，解之 $f(x)=-6x^2+Cx+1$.

因为曲线 $y=f(x)$ 过 $A(1,0)$ 点，即 $f(1)=0$，代入上式，得 $C=5$.

所以所求曲线为 $y=f(x)=-6x^2+5x+1$.

【例 2.17】 已知曲线 $y=f(x)(x>0)$ 是微分方程 $2y''+y'-y=(4-6x)e^{-x}$ 的一条积分曲线，此曲线通过原点且在原点处的切线斜率为 0.

试求：(1) 曲线 $y=f(x)$ 到 x 轴的最大距离；(2) 计算 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$.

【解】 微分方程的特征方程为 $2\lambda^2+\lambda-1=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=-1,\lambda_2=\frac{1}{2}$,

设非齐次方程的特解为 $y^*(x)$,

则
$$y^*(x)=\frac{1}{2D^2+D-1}e^{-x}(4-6x)=e^{-x}\frac{1}{2(D-1)^2+(D-1)-1}(4-6x)$$

$$=e^{-x}\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{2D-3}(4-6x)=e^{-x}\frac{1}{D}\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D\right)(4-6x)$$

$$=-e^{-x}\left(\frac{1}{3D}+\frac{2}{9}\right)(4-6x)=\left(x^2-\frac{8}{9}\right)e^{-x},$$

故 微分方程的通解 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}+\left(x^2-\frac{8}{9}\right)e^{-x}$.

将初始条件 $y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=0$ 代入通解中，得 $C_2=0,C_1=\frac{8}{9}$,

故 曲线为 $y=x^2e^{-x}$.

(1) $y'=f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$，令 $f'(x)=0\quad\Rightarrow\quad$ 驻点 $x=2$,

$f''(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}$，$f''(2)=-2e^{-2}<0$,

故 $\max f(x)=x^2e^{-x}\Big|_{x=2}=4e^{-2}$ —— 曲线到 x 轴的最大距离.

(2) $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx$

$$= \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx = -2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x}dx = 2.$$

【例 12.18】 设有曲线通过原点，且其上任一点 $M(x,y)$ 的切线 MT（T 为切线与 x 轴的交点）与直线 MP（P 为 M 在 x 轴上的垂直投影）、x 轴所围图形的面积与曲边三角形 OMP 的面积之比等于常数 $k\left(>\frac{1}{2}\right)$（见图 12.3），求此曲线.

【解】 曲线在 M 点处的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，

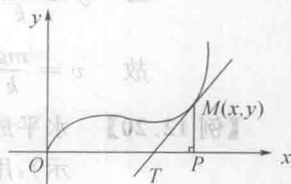


图 12.3

令 $Y=0$，得 T 点的横坐标 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，

$MP=y, PT=x-X=\dfrac{y}{y'}$，

$\triangle MPT$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}y\cdot\dfrac{y}{y'}=\dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{y'}$，

曲边三角形 OMP 的面积为 $\int_0^x y(x)dx$，

由题设 $\dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{y'}=k\int_0^x y(x)dx$，两边对 x 求导，并整理得

$yy''=2(1-k)y'^2$ —— 不显含 x 的二阶方程，

令 $y'=p, y''=p\dfrac{dp}{dy}$ 代入方程，得

$yp\dfrac{dp}{dy}=2(1-k)p^2 \Rightarrow p=0$ 或 $y\dfrac{dp}{dy}=2(1-k)p$，

由 $p=0 \Rightarrow y=C, y\Big|_{x=0}=0 \Rightarrow y=0$，

由 $y\dfrac{dp}{dy}=2(1-k)p \Rightarrow \ln p=2(1-k)\ln y+\ln C_1$

$\Rightarrow p=C_1y^{2(1-k)}$，即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y^{2(1-k)}$

$\Rightarrow y^{2k-1}=(2k-1)(C_1x+C_2)$，将 $y\Big|_{x=0}=0$ 代入

得 $C_2=0$，故 $y^{2k-1}=Cx$，

故 所求曲线为 $y^{2k-1}=Cx$.

2. 微分方程在力学中的应用

解题程序：① 建立坐标系，对所研究物体进行受力分析；② 根据牛顿第二定律：$F=ma$，列方程；③ 解方程.

【例 12.19】 一跳伞运动员在 $t=0$ 的时刻，从高 h 的地方降落，设降落过程中所受阻力与下落速度成正比，求下落速度.

【解】 设运动员的质量为 m，下落速度为 v，加速度为 a，于是，由牛顿第二定律有

$F_{净力}=ma=m\dfrac{dv}{dt}, F_{净力}=F_{重力}+F_{阻力}$，

由题设 $F_{阻}$ 与下落速度 v 成正比，又因它们方向相反，所以 $F_{阻力}=-kv(k>0$ 常数)，

$F_{重力}=mg$，于是 $F_{净力}=mg-kv$，于是

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}(v - \frac{m}{k}g), \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

对方程积分，得 $\ln\left(v - \frac{m}{k}g\right) = -\frac{k}{m}t + \ln C$

$\Rightarrow \quad v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}$，将初值 $v(0) = 0$ 代入，得 $C = -\frac{mg}{k}$，

故 $\quad v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$.

【例 12.20】 水平放置的弹簧左端固定，右端与一个质量为 m 的物体相连(如图 12.4 所示)，用力将物体从平衡位置 O 向右拉，使弹簧伸长 a，然后放开，由于弹簧恢复力的作用(恢复系数为 k)，物体便左右振动，设摩擦力很小可忽略，求物体的运动规律.

【解】 取平衡位置 O 为坐标原点，向右的方向盘为 x 轴的正向. 设 t 时刻物体的位置为坐标 x，则在 t 时刻物体所受到的力为弹簧恢复力 $= -kx$.

由牛顿第二定律有

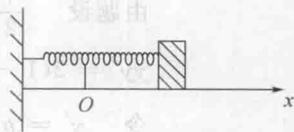


图 12.4

$$\begin{cases} m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \\ x\Big|_{t=0} = a \\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \\ x\Big|_{t=0} = a, \\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

特征方程为 $\lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$，于是方程的通解

$x = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$，代入初始条件，得 $C_1 = a, C_2 = 0$，

故 物体的运动规律为 $x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

第二篇　线性代数

第一章　行列式

记号：

(1) 本章中的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示方阵；$|\boldsymbol{A}|,|\boldsymbol{B}|,|\boldsymbol{C}|,\cdots$ 表示与之对应的行列式.

(2)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(或 $\boldsymbol{A}'$) 为 $\boldsymbol{A}$ 的转置;$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

(3)A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 或 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式;$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

重要公式：

(1) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$；　(2) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}$；　(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$；

(4) $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$；　(5) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ($\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵)；

(6) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

(m,n 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的阶)

(7) 行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的展开

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

(8) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

题型 I　确定用行列式表示的多项式 $f(x)$ 中,关于 x 的最高次数及 x 的各次幂前的系数

【解题提示】　求解这类题型的方法：利用行列式的定义或行列式的性质，或两者兼而用之.

【例 1.1】　填空题.

(1) 已知多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的最高次数为______.

(2) 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 x^4 的系数为________，x^3 的系数为________.

(3) 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 & 2 \\ 1 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 3x+1 & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4x+1 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 的最高次次数为________，其系数为________.

【解】 (1) $(-1)\times$ 第 1 行，然后分别加到第 2、3、4 行，则

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} & a_{24}-a_{14} \\ a_{31}-a_{11} & a_{32}-a_{12} & a_{33}-a_{13} & a_{34}-a_{14} \\ a_{41}-a_{11} & a_{42}-a_{12} & a_{43}-a_{13} & a_{44}-a_{14} \end{vmatrix}$$，再按第 1 行展开可知，$f(x)$ 的最高次数为 1.

(2) 从 $f(x)$ 的表达形式可看出，仅当主对角线上的 4 个元素相乘才能得出 x^4，其系数显然应该是 2. 第 1 行取 $a_{13}(=1)$，$a_{14}(=2)$，则含 a_{13} 或 a_{14} 的行列式的项中是不会出现 x^3 的，含 $a_{11}(=2x)$ 的项也不会出现 x^3，于是含 x^3 的项只能是 $a_{12}(=x)$，$a_{21}(=1)$，$a_{33}(=x)$，$a_{44}(=x)$ 的乘积，其符号为 $(-1)^{\tau(2134)}=-1$，故 x^3 的系数为 -1.

(3) $$f(x)=\begin{vmatrix} x & x+2 & x+3 & 2 \\ 0 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 3x & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4x & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x+2 & x+3 & 2 \\ 1 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 3x+3 & 8 \\ 1 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & x & x+3 & 2 \\ 0 & 2x & 7 & 5 \\ 3x & 0 & 3x+3 & 8 \\ 4x & 0 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 2 & x+3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \\ 3x & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4x & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x+2 & x+3 & 2 \\ 1 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 3x+3 & 8 \\ 1 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$$

$$=x^2\begin{vmatrix}1&1&x+3&2\\0&2&7&5\\3&0&3x+3&8\\4&0&1&4x+4\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1&2&x+3&2\\0&2&7&5\\3&3&3x+3&8\\4&8&1&4x+4\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}1&x+2&x+3&2\\0&x&4-x&3\\0&1-x&2x&6\\0&-x+6&-x-2&4x+2\end{vmatrix},$$

由行列式的定义可知，这三个行列式中只有第一个行列式可能含有 x^4，经观察其系数为 0，故关于 x 的最高次数 $\leqslant 3$. 第一个行列式中 x^3 的系数为 76，第二个行列式中 x^3 的系数为 48，现计算第三个行列式中 x^3 的系数.

$$\text{第三个行列式}=\begin{vmatrix}x&4-x&3\\1-x&2x&6\\6-x&-x-2&4x+2\end{vmatrix}=2x^3,$$

故 $f(x)$ 的最高次数 3，其系数为 126.

题型 Ⅱ　涉及方阵、逆矩阵、伴随矩阵、向量等概念的 3 ～ 5 阶行列的计算

【解题提示】 要求熟记前面所列举的公式及逆矩阵、伴随矩阵、向量等运算.

【例 1.2】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=a$，$\boldsymbol{B}$ 为 m 阶方阵，$|\boldsymbol{B}|=b$，则 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}\\3\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{vmatrix}$ 为

(A) $-6ab$.　　(B) $-2^n3^m ab$.

(C) $(-1)^{mn}2^n3^m ab$.　　(D) $(-1)^{m+n}2^n\cdot 3^m ab$.

【解】 由公式(4) 及(6) 即可知(C) 入选.

【例 1.3】 填空题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵. $|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{3}$，则 $\left|\left(\dfrac{1}{7}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-12\boldsymbol{A}^*\right|=$ ______.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3)$，则 $|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_1,4\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_1|$ $=$ ______.

(3) $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶正交矩阵，$|\boldsymbol{A}|<0$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶方阵，$|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=4$，则 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=$ ______.

(4) $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，且 $\boldsymbol{A}_{ij}=a_{ij}$，$a_{11}\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}|$ $=$ ______.

【解】 (1) $\left(\dfrac{1}{7}\boldsymbol{A}\right)^{-1}=7\boldsymbol{A}^{-1}$，$12\boldsymbol{A}^*=12|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=4\boldsymbol{A}^{-1}$，

故 $\left|\left(\dfrac{1}{7}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-12\boldsymbol{A}^*\right|=|7\boldsymbol{A}^{-1}-4\boldsymbol{A}^{-1}|=|3\boldsymbol{A}^{-1}|=3^3\times 3=81$.

(2) $|\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{A}_2+3\boldsymbol{A}_1,4\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_1|=|\boldsymbol{A}_3,4\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_1|+|-2\boldsymbol{A}_2,4\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_1|+|3\boldsymbol{A}_1,4\boldsymbol{A}_2,3\boldsymbol{A}_1|$ $=12|\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_1|+0+0=-12|\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3|=-12\times 3=-36$.

(3) 由题设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，于是 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$，又 $|\boldsymbol{A}|<0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}|$

$$=-|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=-|(-1)(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})|$$
$$=-(-1)^3|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}|=4.$$

(4) **若题设条件中提及 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij}，则应联想到 A 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 及 $|\boldsymbol{A}|$ 按行(或列)展开.**

因为 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})_{3\times3}=(a_{ji})_{3\times3}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(因为 $A_{ij}=a_{ij}$)，

$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$，又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=|\boldsymbol{A}|^2$，(因为 $n=3$)

所以 $|\boldsymbol{A}|^2=|\boldsymbol{A}| \Rightarrow |\boldsymbol{A}|(|\boldsymbol{A}|-1)=0 \Rightarrow |\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}|=1$.

又因为 $|\boldsymbol{A}|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\xlongequal{\text{因为 } A_{ji}=a_{ij}}a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq0$(因为 $a_{11}\neq0$).

所以 $|\boldsymbol{A}|=1$.

【例 1.4】 设 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&2&2\\3&2&1&4&6\\2&2&2&1&1\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}$，则(1) $A_{31}+A_{32}+A_{33}=$______；(2) $A_{34}+A_{35}=$______；(3) $A_{51}+A_{52}+A_{53}+A_{54}+A_{55}=$______.

【解】 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+2(A_{34}+A_{35})=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&2&2\\1&1&1&2&2\\3&2&1&1&1\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=0$，(因为第 2、3 行相同)

$$\begin{cases}\text{即 } A_{31}+A_{32}+A_{33}+2(A_{34}+A_{35})=0,\\ \text{同理 } 2(A_{31}+A_{32}+A_{33})+A_{34}+A_{35}=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}A_{31}+A_{32}+A_{33}=0,\\A_{34}+A_{35}=0,\end{matrix}$$

$$A_{51}+A_{52}+A_{53}+A_{54}+A_{55}=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&2&2\\3&2&1&4&6\\2&2&2&1&1\\1&1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&2&2\\2&2&2&1&1\\3&2&1&4&6\\1&2&3&4&5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&-1\\3&2&1&4&6\\1&2&3&4&5\end{vmatrix}=0.$$

【例 1.5】 填空题

$$D_1=\begin{vmatrix}246&427&327\\1014&543&443\\-342&721&621\end{vmatrix}=\underline{\qquad}.$$

(2)$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = $______.

(3)$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = $______.

【解】 (1) 3 阶行列式有计算公式，但因各元素的数值太大，乘积运算繁，因此要仔细观察分析，用技巧求解.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 246 & 427-327 & 327 \\ 1014 & 543-443 & 443 \\ -342 & 721-621 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 100 & 327 \\ 1014 & 100 & 443 \\ -342 & 100 & 621 \end{vmatrix} = 600 \begin{vmatrix} 41 & 1 & 327 \\ 169 & 1 & 443 \\ -57 & 1 & 621 \end{vmatrix}$$

$$= 600 \begin{vmatrix} 41 & 1 & 327 \\ 128 & 0 & 116 \\ -98 & 0 & 294 \end{vmatrix} = 600 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 128 & 0 & 116 \\ -98 & 0 & 294 \end{vmatrix} = -600 \begin{vmatrix} 128 & 116 \\ -98 & 294 \end{vmatrix}$$

$$= -600 \begin{vmatrix} 128 & 500 \\ -98 & 0 \end{vmatrix} = -600 \times 500 \times 98 = -294 \times 10^5.$$

(2) 各列加到第 1 列，得

$$D_2 = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160.$$

(3) 这种有分数元素的行列式应首先将各元素均换成整数，然后再分析运算.

$$D_3 = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{8}\begin{vmatrix}1&-1&0&1&2\\0&2&-1&-1&-2\\0&10&2&-5&-12\\0&3&0&0&-6\\0&6&6&-4&-7\end{vmatrix}=\frac{3}{8}\begin{vmatrix}1&-1&0&1&2\\0&1&0&0&-2\\0&10&2&-5&-12\\0&2&-1&-1&-2\\0&6&6&-4&-7\end{vmatrix}$$

$$=\frac{3}{8}\begin{vmatrix}1&-1&0&1&2\\0&1&0&0&-2\\0&0&2&-5&8\\0&0&-1&-1&2\\0&0&6&-4&5\end{vmatrix}=\frac{3}{8}\begin{vmatrix}2&-5&8\\-1&-1&2\\6&-4&5\end{vmatrix}=\frac{3}{8}.$$

【例 1.6】 填空题

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 4 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=1$，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维列向量，计算 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=$ ________.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均为 4 维列向量，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|=m$，$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=n$，则 $|\boldsymbol{\alpha}_3,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2),\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=$ ________.

【解】 (1) $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)+(2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4)$

$=(\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4)$，

$|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4|=|\boldsymbol{\alpha},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4|+|2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4|$

$=27|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+54|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|=27|\boldsymbol{A}|+54|\boldsymbol{B}|=108.$

(2) $|\boldsymbol{\alpha}_3,(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2),\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|$

$=-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-m+n.$

题型 Ⅲ　证明抽象行列式等于零的方法

【解题提示】 常用方法有：

(1) 利用 $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$ 关系 $\Rightarrow$ $|\boldsymbol{A}|=0$；

(2) 利用齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow$ $|\boldsymbol{A}|=0$；

(3) 设法证明 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 $\lambda=0$；

(4) 用反证法.

【例 1.7】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵，且 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{B}|}=-1$，证明：$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

【证】 因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交矩阵，所以 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，

$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}|$

$=|\boldsymbol{B}||(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}|.$

又 $|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$，

$\Rightarrow|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\xrightarrow{\text{因为}|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|}2|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0.$

注　已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为正交阵，在欲证结论中左乘(或右乘)一个方阵的转置所对应的行列式是常用的一种方法.

【例 1.8】 已知 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi\xi}^{\mathrm{T}}$，证明：$|\boldsymbol{A}|=0$.

【证】 $A = E - \xi\xi^{T} \Rightarrow A\xi = (E - \xi\xi^{T})\xi = \xi - \xi(\xi^{T}\xi) \xlongequal{\text{由 } \xi^{T}\xi = 1} 0$,

又由 $\xi^{T}\xi = 1$,可知 ξ 为非零列向量,故 $|A| = 0$.

【另证】 $A^{2} = (E - \xi\xi^{T})(E - \xi\xi^{T}) = E - \xi\xi^{T} - \xi\xi^{T} + \xi\xi^{T}(\xi\xi^{T})$

$= E - 2\xi\xi^{T} + \xi(\xi^{T}\xi)\xi^{T} = E - 2\xi\xi^{T} + \xi\xi^{T} = E - \xi\xi^{T} = A$,

即 $A^{2} = A \Rightarrow |A|(|A| - 1) = 0 \Rightarrow |A| = 0$ 或 $|A| = 1$,

若 $|A| = 1, A\xi = (E - \xi\xi^{T})\xi = \xi - \xi(\xi^{T}\xi) = \xi - \xi = 0$,

$\Rightarrow \xi = 0$,但由 $\xi^{T}\xi = 1$,可知 ξ 为非零列向量,矛盾.

故 $|A| = 0$.

题型 Ⅳ　n 阶行列式的计算法

【解题提示】 n 阶行列式的计算,其基本方法和技巧是"化零"和"降阶".常用的方法有:① 定义法;② 利用基本性质化为三角形行列式;③ 递推法与数学归纳法;④ 公式法等.在计算 n 阶行列式时,要根据行列式中行(或列)元素的特点,来选择相应的解题方法.

1. 利用 n 阶行列式的定义计算(适用于行列式有较多元素为零的情形)

【例 1.9】 填空题.

(1) 在一个 n 阶行列式 D 中等于"0"的元素个数 $> n^{2} - n$,则 $D =$ ________.

(2) $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1999 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2000 \end{vmatrix} =$ ________.

【解】 (1) 一个 n 阶行列式 D 共有 n^{2} 个元素,既然"0"元素的个数 $> n^{2} - n$,因此非零元素的个数 $< n(n^{2} - (n^{2} - n) = n)$,而由 n 阶行列式的定义可知,D 的每一项均为"0"(因为每一项中至少有一个"0"元素),故 $D = 0$.

(2) $D = (-1)^{\tau(n-1, n-2, \cdots, 1, n)} a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{nn}$

$\xlongequal{n = 2000} (-1)^{\frac{1999 \times 1998}{2}} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1999 \cdot 2000 = -2000!$.

2. 行加法(或列加法)(适用于各行(或列)诸元素之和相等,或多数相等仅个别不相等的情形)

【例 1.10】 计算 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 - \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \cdots & 1 - \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & 2 & 1 - \frac{1}{n} & \cdots & 1 - \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 - \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \cdots & 2 \end{vmatrix}$.

【解】 将第 $2 \sim n+1$ 列全加到第 1 列,再提出 $n+1$ 后,得

$$D_{n+1}=(n+1)\begin{vmatrix}1 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}\\ 1 & 2 & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}\\ 1 & 1-\frac{1}{n} & 2 & \cdots & 1-\frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & 2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{减第 1 列}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)]{2\sim n+1\text{ 各列}}(n+1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \left(1+\frac{1}{n}\right) & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \left(1+\frac{1}{n}\right) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \left(1+\frac{1}{n}\right)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}.$$

【例 1.11】 计算 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) & n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (1-n) & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & (1-n) & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$.

【解】 将第 $2\sim n$ 列全加到第 1 列，再提出 $\frac{1}{2}n(n+1)$，得

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & (n-1) & n\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (1-n)\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & (1-n) & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & (1-n) & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & (1-n)\\ 1 & 1 & \cdots & (1-n) & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ (1-n) & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}，\text{为}(n-1)\text{ 阶行列式}.$$

再将第 $2\sim(n-1)$ 列加到第 1 列，得

$$D_n=\frac{1}{2}(n+1)n\begin{vmatrix}-1 & 1 & \cdots & 1 & (1-n)\\ -1 & 1 & \cdots & (1-n) & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到 }2,3\cdots,(n-1)\text{ 列}]{\text{将第 1 列分别}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

3. **各行(或列)加减同一行(或列)的倍数(适用于加减后某一行(或列)诸元素有公因子或变成三角行列式)**

【例 1.12】 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$.

当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(y_2-y_1)$，

当 $n \geqslant 3$ 时，$D_n \xlongequal[\text{第 1 行}]{\text{各行减去}} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ y_1(x_2-x_1) & y_2(x_2-x_1) & \cdots & y_n(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1(x_n-x_1) & y_2(x_n-x_1) & \cdots & y_n(x_n-x_1) \end{vmatrix}$

$=0$.(因为从第二行以后各行成比例)

【例 1.13】 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

【解】 $D_4 \xlongequal[\text{加第 }2\sim4\text{ 列上}]{\text{第 1 列的}(-1)\text{ 倍}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{第 2 列}\times(-3)+\text{第 4 列}]{\text{第 2 列}\times(-2)+\text{第 3 列}} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

4. **利用范德蒙行列式计算行列式**

【例 1.14】 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n^2 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$.

【解】 $D_n = D_n^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^n & 3^n & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{提出 3,… 第 } n \text{ 列提出 } n]{\text{从第 2 列提出 2,第 3 列}} n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= n!(2-1)(3-1)\cdots(n-1)\cdot(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]$$

$$= n!(n-1)!(n-2)!\cdots 2!.$$

【例 1.15】 计算 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\varphi_1 & 1+\varphi_2 & 1+\varphi_3 & 1+\varphi_4 \\ \varphi_1+\varphi_1^2 & \varphi_2+\varphi_2^2 & \varphi_3+\varphi_3^2 & \varphi_4+\varphi_4^2 \\ \varphi_1^2+\varphi_1^3 & \varphi_2^2+\varphi_2^3 & \varphi_3^2+\varphi_3^3 & \varphi_4^2+\varphi_4^3 \end{vmatrix}$.

【解】 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_1+\varphi_1^2 & \varphi_2+\varphi_2^2 & \varphi_3+\varphi_3^2 & \varphi_4+\varphi_4^2 \\ \varphi_1^2+\varphi_1^3 & \varphi_2^2+\varphi_2^3 & \varphi_3^2+\varphi_3^3 & \varphi_4^2+\varphi_4^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_1+\varphi_1^2 & \varphi_2+\varphi_2^2 & \varphi_3+\varphi_3^2 & \varphi_4+\varphi_4^2 \\ \varphi_1^2+\varphi_1^3 & \varphi_2^2+\varphi_2^3 & \varphi_3^2+\varphi_3^3 & \varphi_4^2+\varphi_4^3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_1+\varphi_1^2 & \varphi_2+\varphi_2^2 & \varphi_3+\varphi_3^2 & \varphi_4+\varphi_4^2 \\ \varphi_1^2+\varphi_1^3 & \varphi_2^2+\varphi_2^3 & \varphi_3^2+\varphi_3^3 & \varphi_4^2+\varphi_4^3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{类似处理}} \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & \varphi_3^2 & \varphi_4^2 \\ \varphi_1^3 & \varphi_2^3 & \varphi_3^3 & \varphi_4^3 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(\varphi_j-\varphi_i).$$

5. 除主对角线外其余元素全相同的行列式的计算法

解题程序：① 在行列式 D 的各元素中加上一个数 x，使新行列式 D_* 除主对角线外，其余元素均为 0；② 计算 D_* 的主对角线各元素的代数余子式 $A_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$；③$D=D_*-x\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii}$.

【例 1.16】 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}$.

【解】 显然，在 D_n 的各元素中加上(-1)后，则有

$$(D_n)_* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{11} = (1-x)(2-x)\cdots[(n-1)-x], A_{22} = A_{33} = \cdots A_{nn} = 0,$$

故　$D_n = (D_n)_* - (-1)\sum\limits_{i=1}^{n}A_{ii} = 0-(-1)A_{11} = A_{11} = (1-x)(2-x)\cdots[(n-2)$

$-x]$.

【例 1.17】 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+2^2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+2^n \end{vmatrix}$.

【解】 显然,在 D_{n+1} 的各元素中加上$(-x)$ 后,则有

$$(D_{n+1})_* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^n \end{vmatrix} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_{ij} = 2\times 2^2\times\cdots\times 2^n + 1\times 2^2\times 2^3\times\cdots\times 2^n + 1\times 2\times 2^3\times\cdots\times 2^n + \cdots + 1\times 2\times \cdots\times 2^{n-1}$$

$$= 2^{1+2+3+\cdots+n} + 2^{2+3+\cdots+n} + 2^{1+3+4+\cdots+n} + \cdots + 2^{1+2+\cdots+(n-1)}$$

$$= 2^{\frac{n(n+1)}{2}}(1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n}) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\cdot 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

故 $\quad D_{n+1} = (D_{n+1})_* - (-x)\sum_{i=1}^{n+1} A_{ii} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\left[1+x\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\right]$.

【例 1.18】 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

【解】 显然,在 D_n 的各元素中加上(-2),则有

$$(D_n)_* = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = (-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-2) = -(n-2)!,$$

$$D_n = (D_n)_* - (-2)\sum_{i=1}^{n} A_{ii} = 0-(-2)[-(n-2)!] = -2(n-2)!.$$

题型 V　综合题

【例 1.19】 设 $x>y>z>0$,证明:$\dfrac{1}{xy+yz+zx}\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} < 0$.

【证】 将第 1 列$\times(x+y+z)$,第 2 列$\times(-1)$,然后加到第 3 列,得

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & yz+(x+y+z)x-x^2 \\ y & y^2 & zx+(x+y+z)y-y^2 \\ z & z^2 & xy+(x+y+z)z-z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & xy+yz+zx \\ y & y^2 & xy+yz+zx \\ z & z^2 & xy+yz+zx \end{vmatrix}$$

$$=(xy+yz+zx)\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix},$$

于是　不等式的左边 $=\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

$=(x-y)(y-z)(z-x),$

由于 $x>y>z>0$，有 $x-y>0, y-z>0, z-x<0$.

故 $\dfrac{1}{xy+yz+zx}\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}<0.$

【例 1.20】　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 \\ \sin x & x & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin x & \cos x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$

【解】　原式 $\xlongequal[\text{及行列式微分法}]{\text{由洛毕达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ \sin x & x & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin x & x & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 \\ \cos x & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+\sin x & \cos x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos x & -\sin x & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin x & \cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$

$$=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}=-4.$$

【例 1.21】　求极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^3}\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(x+h) & \varphi(x+h) & \psi(x+h) \\ f(x+2h) & \varphi(x+2h) & \psi(x+2h) \end{vmatrix}$，其中 f,φ,ψ 二阶可导.

【解】　原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} & \dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} & \dfrac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} \\ \dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} & \dfrac{\varphi(x+2h)-2\varphi(x+h)+\varphi(x)}{h^2} & \dfrac{\psi(x+2h)-2\psi(x+h)+\psi(x)}{h^2} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f'(x) & \varphi'(x) & \psi'(x) \\ f''(x) & \varphi''(x) & \psi''(x) \end{vmatrix}$$

其中$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}=f''(x),$$

$\varphi''(x)$，$\psi''(x)$的含义同.

【例 1.22】 设$f(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，试证：至少$\exists$一个$\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

【证】 作辅助函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$，

显然　$F(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，又$F(a)=F(b)=0$，

可见罗尔定理条件满足，于是$\exists$一个$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，

即 $\begin{vmatrix} f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \\ f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \end{vmatrix}=0.$

第二章　矩阵

矩阵运算中的重要性质及公式

（Ⅰ）转置矩阵的性质

(1)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$.

(2)$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(3)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

(4)$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

（Ⅱ）逆矩阵的性质

(1)$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$.

(2)$(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1},\lambda\neq 0$.

(3)$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

(4)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

（Ⅲ）伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的性质

(1)$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

(2)$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$.

(3)$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

(4)$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}(n\geqslant 3)$.

一个重要公式

$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

（Ⅳ）分块矩阵的性质

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，

(1)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.

(2)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(3)$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.

题型Ⅰ　关于矩阵的基本性质及初等变换的命题

【解题提示】　(1) 牢记矩阵运.

(2) 矩阵初等变换有如下性质：

① 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，则对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的一个 m 阶初等方阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的一个 n 阶初等方阵.（简称行左列右）；

② $\boldsymbol{A}$ 为可逆方阵，则存在有限个初等方阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$，使

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$；

③ 矩阵的初等变换不改变矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

【例 2.1】　选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2$

(A)$3\boldsymbol{E}$.　　(B)$2\boldsymbol{E}$.　　(C)$\boldsymbol{E}$.　　(D)$\boldsymbol{O}$.　　【　】

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶反对称矩阵，则下列矩阵中为反对称矩阵的是

(A)$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.　　(B)$\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}$.　　(C)$(\boldsymbol{AB})^2$.　　(D)$\boldsymbol{BAB}$.　　【　】

(3) 设分块矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\beta}_1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\beta}_2&k\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_i$ 为 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $n\times 1$ 矩阵，$\boldsymbol{\beta}_i$ 为 $1\times n$ 矩阵 $(i=1,2)$，k 为实数，则 k 为

(A)1.　(B)$\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1$.　(C)$\dfrac{1}{1-\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1}$.　(D)$\dfrac{1}{1+\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}_1}$.　【　】

(4) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是

(A)$\boldsymbol{A}^k \neq \boldsymbol{O}$($k$ 为正整数).　(B)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(C)$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.　(D)$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AC}$ 必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.　【　】

【解】 (1) $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{CA})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AEA}=\boldsymbol{A}^2$,

同理可得　$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}^2,\boldsymbol{E}=\boldsymbol{C}^2$,故　$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2=3\boldsymbol{E}$,可知(A) 入选.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

因为 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶反对称,所以 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$,

$(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}-(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$,

可知(A) 不入选.

$(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}=-(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})$,

故(B) 入选.

(3) $$\boldsymbol{XX}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\beta}_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2 & k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{E}, & ①\\ \boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}, & ②\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}, & ③\\ \boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\alpha}_2+k=1. & ④\end{cases}$$

由 ③ 有 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}_2=-k\boldsymbol{\alpha}_1$,

于是,由 ④ 有 $k=1-\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\alpha}_2=1-\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1)a_2=1-\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}_2)$

$=1-\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}(-k\boldsymbol{\alpha}_1)=1+k\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1$.

$\Rightarrow\quad k=\dfrac{1}{1-\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}_1}$,故　(C) 入选.

(4) $$\boldsymbol{A}^k\neq 0\begin{cases}\Rightarrow|\boldsymbol{A}|\neq 0.\text{ 例如 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ \Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0.\text{ 例如 }\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\end{cases}$$,因此 $\boldsymbol{A}^k\neq 0$ 是可逆的必要条件而非充分条件.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,由 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AC}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{ACA}^{-1}\neq\boldsymbol{C}$(一般情况下),可见(D) 不该入选.

又正交矩阵是可逆的充分条件,而非必要条件,可见(C) 也不该入选. 故入选者为(B).

【例 2.2】 选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{13}&a_{12}+a_{13}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}+a_{23}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}+a_{33}&a_{31}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$,则必有

(A)　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$.　(B)　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$.

(C)　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2$.　(D)　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1$.　【　】

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}+ka_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+ka_{33}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}+ka_{13}&a_{13}\end{pmatrix}$，$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$，

$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{pmatrix}$，则 A 等于

(A) $A=P_1^{-1}BP_2^{-1}$.　　(B) $A=P_2^{-1}BP_1^{-1}$.

(C) $A=P_1^{-1}P_2^{-1}B$.　　(D) $A=BP_1^{-1}P_2^{-1}$.　　【　】

(3) 当 $P=$【　】时，$P\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}-3a_{31}&a_{12}-3a_{32}&a_{13}-3a_{33}&a_{14}-3a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$，

(A) $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$.　　(B) $P=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C) $P=\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　　(D) $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$.　　【　】

【解】 (1) B 可看作对 A 施行第 3 列加到第 2 列，然后再将第 1 列与第 3 列互换而得到的矩阵. 由“行左列右”性质，可知(D)入选.

(2) 本例备选的四个答案可分别转化为

(A) $B=P_1AP_2$.　　(B) $B=P_2AP_1$.

(C) $B=P_1P_2A$.　　(D) $B=AP_2P_1$.

$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ 可看作 $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 先将第 1、2 行互换再将第 2、3 行互换而得的方阵. 由“行左列右”性质可知 $B=P_1AP_2$，故(A)入选.

(3) 本题可用“行左列右”性质做，也可直接乘积做，现用后者做.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&&\\a_{21}&&*\\-3a_{11}+a_{31}&&\end{pmatrix}$$，与结论比较，

可知(A)不入选.

$$\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}-a_{31}&a_{12}-3a_{32}&a_{13}-3a_{33}&a_{14}-3a_{34}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$，

可知(B)入选.

【例 2.3】 填空题

(1) $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{21}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{20}=$ ______.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$，则 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=$ ______.

(3) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$，则与 A 乘积可交换的矩阵 $B=$ ______.

【解】 (1) 将一个矩阵中的某两行(或列)交换偶数次，则该矩阵不变，因此

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3\\b_1&b_2&b_3\\a_1&a_2&a_3\end{pmatrix}.$$

(2) $$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\l&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\la_{11}+a_{21}&la_{12}+a_{22}&la_{13}+a_{23}&la_{14}+a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}.$$

(3) 设 $B=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$.

因为 $AB=BA$，

所以 $\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}\right]$，

$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}0&2x_{11}\\0&x_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_{12}&0\\2x_{22}&0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ x_{11}=x_{22},x_{12}=0$,

故　与 A 可交换的矩阵为 $B=\begin{bmatrix}x_{11}&0\\x_{21}&x_{11}\end{bmatrix}$，其中 x_{11},x_{21} 为任意常数.

题型 Ⅱ　有关 $\alpha^T\alpha$ 与 $\alpha\alpha^T$ 命题的求解与论证

【解题提示】 要注意：

(1) 若 α 为 n 维列向量，设 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，则 $\alpha^T\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 为一个数.

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}.$$

有其下运算律：$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$

$= \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})$

式 ① 两边互化务必熟练.

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维行向量，设 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 则

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \qquad ②$$

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \text{ 为一个数.}$$

有如下运算律：$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})$.

式 ② 两边互化要熟练.

【例 2.4】 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta} = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【解】 $\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})^n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} \cdots \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \underbrace{(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}) \cdots (\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})}_{n-1\text{个}} \cdot \boldsymbol{\beta}$

因为 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$，

$$\text{所以 } \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(3^{n-1})\boldsymbol{\beta} = 3^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}) = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

【例 2.5】 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha} = \left(\dfrac{1}{2}, 0, \cdots, 0, \dfrac{1}{2}\right)$，矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，求 $(\boldsymbol{AB})^n$.

【解】
$$\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} + 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha}, \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{2}\quad 0\quad 0\quad \frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}$,

所以 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}-2\times\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}$,

故 $(\boldsymbol{AB})^n=\boldsymbol{E}$.

【例 2.6】 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 均为非零向量，且满足条件 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$，记 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}^2$.

【解】 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$

$=0$（因为 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 为一个数，所以 $(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=0$）.

【例 2.7】 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置. 证明：(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$；(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 是不可逆的.

【证】 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$

$=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{E}-(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$,

$\Rightarrow\ 2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1\ \Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$.

(2) 用反证法. 由 (1) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时，有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，与假设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$ 矛盾，故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

题型Ⅲ　求 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂 $\boldsymbol{A}^k$ 的方法

【解题提示】 求 $\boldsymbol{A}^k$ 的方法有四种.

(1) 将 $\boldsymbol{A}$ 写成列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与行向量 $\boldsymbol{\beta}$ 乘积形式　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}$，前提条件：$r(\boldsymbol{A})=1$，

则　$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}\cdots\boldsymbol{\alpha\beta}=\boldsymbol{\alpha}\underbrace{(\boldsymbol{\beta\alpha})\cdot(\boldsymbol{\beta\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta\alpha})}_{(n-1)\text{个}}\boldsymbol{\beta}$

(2) 将 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，然后用二项式定理计算

前提条件：$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}$，且 $\boldsymbol{C}^m=\boldsymbol{O}$（$m$ 很小）.

(3) 特征值法.

(4) 归纳法.

【例 2.8】 求下列方阵的 n 次幂 $\boldsymbol{A}^n$.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&2\\-3&1&-2\\6&-2&4\end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix}5&1&0\\0&5&2\\0&0&5\end{bmatrix}$.　(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-3\end{pmatrix}$.

【解】 (1) $\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\2&-2&2\end{bmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=1$，于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}(3,-1,2)=\boldsymbol{\alpha\beta},\ \boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=(3,-1,2),$$

$$A^n = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(3,-1,2)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(3,-1,2)\cdots\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}_{n-1\text{个}}(3,-1,2),$$

因为 $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha}=(3,-1,2)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=8$，

所以 $A^n = 8^{n-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(3,-1,2) = 8^{n-1}\begin{pmatrix}3&-1&2\\-3&1&-2\\6&-2&4\end{pmatrix}$.

(2) $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=B+C$，其中 $B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，

$$C^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$C^3=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$A^n=(B+C)^n=B^n+nB^{n-1}C+\frac{n(n-1)}{2}B^{n-2}C^2+O$$

$$=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}^n+n\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5^n&0&0\\0&5^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n5^{n-1}&0&0\\0&n5^{n-1}&0\\0&0&n5^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&n(n-1)5^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5^n&0&0\\0&5^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5^n&n5^{n-1}&0\\0&0&2n5^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&n(n-1)5^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5^n&n5^{n-1}&n(n-1)5^{n-2}\\0&5^n&2n5^{n-1}\\0&0&5^n\end{pmatrix}.$$

(3) $\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-3-\lambda)+4=\lambda^2+\lambda-2=0,\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=1.$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A=P\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}.$$

(ⅰ) 属于 $\lambda=-2$ 的特征向量：

$\begin{pmatrix}4&2\\-2&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，$2x_1=-x_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$；

（ⅱ）属于 $\lambda=1$ 的特征向量：

$$\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},x_1=-2x_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

所以 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&1\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^n&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\2&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^{n+1}2^n+4&(-2)^{n+1}+2\\(-1)^n2^{n+1}-2&(-1)^n2^{n+2}-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

题型Ⅳ　求满秩矩阵的逆矩阵

【解题提示】　方法有三种：(1) 伴随矩阵法：$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$（适用于 $n\leqslant 3$ 阶求逆）；

(2) 分块矩阵法（适用于“0”元素较多的情形）；

(3) 初等变换法

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})\xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{只对行作}}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1})\text{，或}(\boldsymbol{A})\xrightarrow[\text{初等变换}]{\text{只对行作}}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1})\text{，或}(\boldsymbol{E}).$$

【例 2.9】　求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=$ ________。

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&4&0&0\\0&0&0&5&0\\0&0&0&2&-4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0&a_1&0\\0&0&0&\cdots&a_2&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n-1}&0&0&\cdots&0&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0&a_n\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

【解】　(1) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&0&0\\3&-2&6\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\-2&0&0\\3&-2&6\end{vmatrix}=-4$，

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0&0\\-2&6\end{vmatrix}=0,A_{21}=-\begin{vmatrix}0&-1\\-2&6\end{vmatrix}=2,A_{31}=\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-2&0\\3&6\end{vmatrix}=12,A_{22}=\begin{vmatrix}0&-1\\3&6\end{vmatrix}=3,A_{32}=-\begin{vmatrix}0&-1\\-2&0\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-2&0\\3&-2\end{vmatrix}=4,A_{23}=\begin{vmatrix}0&0\\3&2\end{vmatrix}=0,A_{33}=\begin{vmatrix}0&0\\-2&0\end{vmatrix}.$$

$$故(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}&0\\-3&-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&\\&\boldsymbol{A}_2&\\&&\boldsymbol{A}_3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=4,\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}5&0\\2&-4\end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\times\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2^{-1}=\frac{1}{4},\boldsymbol{A}_3^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0\\-\left(-\frac{1}{4}\right)\times2\times\frac{1}{5}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0&0\\0&0&\frac{1}{4}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{5}&0\\0&0&0&\frac{1}{10}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}a_1&0&\cdots&0\\0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}\end{pmatrix},$

$\boldsymbol{A}_2=a_n,$

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{a_{n-1}}\end{pmatrix},A_2^{-1}=\frac{1}{a_n},$$

$$\text{故 } A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{bmatrix}$$

$$(4)\ A=\left[\begin{array}{cccccc:c}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n\end{array}\right]=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix},A_2=a_n,$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},A_2^{-1}=(a_1^{-1}),A_1^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}^{-1} & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\text{故 } A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}^{-1} & 0 & 0\\ a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n^{-1}\end{bmatrix}.$$

题型 V　求解矩阵方程

【解题提示】 矩阵方程通过化简，变成三种简单形式

(a) $AX = B$；　(b) $XA = B$；　(c) $AXB = C$.

(1) 常规解法是逆矩阵法.

(a) $AX = B$，若 A 可逆，则 $X = A^{-1}B$.

(b) $XA = B$，若 A 可逆，则 $X = BA^{-1}$.

(c) $AXB = C$，若 A,B 均可逆，则 $X = A^{-1}CB^{-1}$.

(2) 快速解法(即初等变换法)。

(a) $AX = B,(A \vdots B) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (E \vdots A^{-1}B), X = A^{-1}B$.

(b) $XA = B, \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ BA^{-1} \end{bmatrix}, X = BA^{-1}$.

(c) $AXB = C$，① $(A,C) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (E \vdots A^{-1}C)$，

② $\begin{pmatrix} B \\ \cdots \\ A^{-1}C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$.

【例 2.10】 假设矩阵 A 和 B 满足关系：

$$AB = A + 2B，\text{其中 } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}，\text{求矩阵 } B.$$

【解】 $(A - 2E)B = A, A - 2E = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -12 & -9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{array}\right]，\text{故 } B = \begin{bmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{bmatrix}.$$

【例 2.11】 解矩阵方程　$XA = B$，其中　$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

【解】
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{作列变换}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -3 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

故 $X = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{8}{3} & 5 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

题型 Ⅵ　关于矩阵 A 存在逆矩阵的证明

【解题思路】　思路之一：验证 $|A| \neq 0$（适用于给出具体元素的矩阵）；

思路之二：找出与 A 同阶的方阵，使 $AB = E$（或 $BA = E$）（适用于 A 为抽象形式）；

思路之三：A 没有"0"特征值；

思路之四：$Ax = 0$ 只有零解；

思路之五：反证法.

【例 2.12】　设 A 为 n 阶方阵，$A^2 + 2A - 3E = O$，证明：$A - 2E$ 可逆，并求其逆.

【证】　$A^2 + 2A - 3E = (A - 2E)(A + 4E) + 5E = O$,

$\Rightarrow\quad (A - 2E)\left(-\dfrac{A + 4E}{5}\right) = E$，故 $A - 2E$ 可逆，其逆为 $-\dfrac{A + 4E}{5}$.

【例 2.13】　设 A 为 n 阶方阵，$A^3 = 2E$，$B = A^2 - 2A + E$. 证明：B 可逆，并求其逆.

【证】　$A^3 - E = E$，即 $(A - E)(A^2 + A + E) = E$,

$B = A^2 - 2A + E = (A - E)^2$,

$B \cdot (A^2 + A + E)^2 = (A - E)^2(A^2 + A + E)^2 = [(A - E)(A^2 + A + E)]^2$

$= (A^3 - E)^2 = E^2 = E.$

故 B 可逆，$B^{-1} = (A^2 + A + E)^2$.

【例 12.14】　设 A、B 均为 n 阶方阵，E 为 n 阶单位矩阵，证明：(1) 若 $A + B = AB$，则 $A - E$ 可逆；(2) 若 $E - AB$ 可逆，则 $E - BA$ 可逆，并求其逆.

【证】　(1) $A + B = AB \Rightarrow A = (A - E)B \Rightarrow (A - E) + E = (A - E)B$

$\Rightarrow\quad (A - E)(B - E) = E$，故 $A - E$ 可逆，并且 $(A - E)^{-1} = B - E$.

(2) 用反证法. 若 $E - BA$ 不可逆，则 $|E - BA| = 0$，于是 $\exists$ 一个 $X \neq O$，

使 $(E - BA)X = O \quad\Rightarrow\quad X = BAX$.

令　$Y = AX$，则 $X = BY \quad\Rightarrow\quad Y \neq O$（否则 $X = O$），

又 $(E-AB)Y=Y-ABY=Y-AX=O$,这与 $(E-AB)$ 可逆矛盾,故 $E-BA$ 可逆.

【另证】 因为 $E-AB$ 可逆,所以 $\exists\, n$ 阶可逆矩阵 C,使

$C(E-AB)=(E-AB)C=E \Rightarrow CAB=ABC=C-E$,

从而 $B(ABC)A=B(C-E)A \quad\Rightarrow\quad E+BCA-BA-BABCA=E$.

【例 2.15】 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2+aA+bE=O$,其中 E 为 n 阶矩阵,a,b 均为常数,问 A 可逆的充要条件是什么?

【解】 设 A^{-1} 存在,则

$A^{-1}(A^2+aA+bE)=A+aE+bA^{-1}=O$

$\Rightarrow \quad bA^{-1}=-(A+aE)$.

(ⅰ)若 $b\neq 0$,则 $A^{-1}=-\dfrac{1}{b}(A+aE)$,

(ⅱ)若 $b=0$,则一定有 $A+aE=O, A=-aE$,因为 A 可逆,所以 $a\neq 0, A^{-1}=-\dfrac{1}{a}E$.

故 $b\neq 0$ 或 $b=0, A+aE=O, a\neq 0$ 是 A^{-1} 存在的必要条件.

反之,设 $b\neq 0$,由 $A^2+aA+bE=O \;\Rightarrow\; A(A+aE)=-bE$

$\Rightarrow \quad A\left(-\dfrac{A+aE}{b}\right)=E$,可知 A 可逆,$A^{-1}=-\dfrac{A+aE}{b}$;

若 $b=0, A+aE=O, a\neq 0$,则 $A=-aE \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=-\dfrac{E}{a}$.

综上所述,A 可逆的充要条件是 $b\neq 0$,或 $b=0, A+aE=O, a\neq 0$.

题型 Ⅶ 与方阵 A 的伴随矩阵 A^* 有关的命题的计算与证明

【解题提示】 牢记伴随矩阵 A^* 的性质及重要公式 $AA^*=A^*A=|A|E$. 涉及 A^* 的秩,应记住如下结论:

$$\text{秩}(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1. \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$$

【例 2.16】 填空题

(1) 设 A 为三阶方阵,其逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$,

则 $(A^{-1})^*=$ ______,$(A^*)^*=$ ______.

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&2&4\end{pmatrix}$,则 $(A^{-1})^*$ ______,$[(A^*)^{-1}]^*=$ ______.

【解】 (1) $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}$,

$$|A^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=2,|A|=\frac{1}{|A^{-1}|}=\frac{1}{2},$$

又
$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\quad A=(A^{-1})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$故(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A=|A|A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

(2) $|A|=\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3&4\\2&4\end{vmatrix}=2(12-8)=8,$

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&2&3&4\\0&0&3&4\\0&0&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{3}{8}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{4}&\frac{3}{8}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{3}{8}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$[(A^*)^*]^{-1}=(|A|^{4-2}A)^{-1}=\frac{1}{64}A^{-1},$$

$$A=\begin{pmatrix}A_1&B_1\\O&A_2\end{pmatrix},A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1}&-A_1^{-1}\cdot B_1A_2^{-1}\\O&A_2^{-1}\end{bmatrix},$$

$$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix},$$

$$-A_1^{-1}B_1A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}1&-1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},$$

$$\text{故}[(A^*)^{-1}]^*=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&-1\\0&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

【例 2.17】 设 A 是 n 阶方阵，满足 $A^m=E$，其中 m 为正整数，E 为 n 阶单位矩阵，将 A 中的元素 a_{ij} 用其代数余子式 A_{ij} 替代，得到的矩阵记为 $\widetilde{A}$，证明 $\widetilde{A}^m=E$.

【证】 $A^m=A\cdot A^{m-1}=E$，可知 A 可逆，于是

$A^*=|A|A^{-1}$，且 $|A^m|=|A|^m=1$.

$$\text{又由题设}\ \widetilde{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}^{\mathrm T}=(A^*)^{\mathrm T},$$

故 $\widetilde{A}^m=[(A^*)^{\mathrm T}]^m=[(|A|A^{-1})^{\mathrm T}]^m=[|A|(A^{\mathrm T})^{-1}]^m=|A|^m[(A^m)^{\mathrm T}]^{-1}$

$=|A|^m(E^{\mathrm T})^{-1}=|A|^mE=E$（因为 $|A|^m=1$ 已证）.

【例 2.18】 设 A 为 n 阶满阶秩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix}E&O\\-\alpha^{\mathrm T}A^*&|A|\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm T}&b\end{pmatrix},$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算并化简 PQ；

(2) 证明：矩阵 Q 可逆转的充分条件是 $\alpha^{\mathrm T}A^{-1}\alpha\neq b$.

【解】 (1) 因为 $AA^*=A^*A=|A|E$，所以有

$$PQ=\begin{pmatrix}E&O\\-\alpha^{\mathrm T}A^*&|A|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^{\mathrm T}&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&\alpha\\O&-\alpha^{\mathrm T}A^*\alpha+b|A|\end{pmatrix}.$$

(2) 由(1)有 $|PQ|=|A|^2(b-\alpha^{\mathrm T}A^{-1}\alpha)$，

又 $|PQ|=|P||Q|$，$|P|=|A|^2(b-\alpha^{\mathrm T}A^{-1}\alpha)$，

故 $|Q|=|A|(b-\alpha^{\mathrm T}A^{-1}\alpha)$，由此可知

$|Q|\neq0$ 的充要条件为 $\alpha^{\mathrm T}A^{-1}\alpha\neq b$，即 Q 可逆的充要条件为 $\alpha^{\mathrm T}A^{-1}\alpha\neq-b$.

题型Ⅷ　矩阵秩的求法及有关矩阵秩的等式与不等式的证明

【解题提示】 (1) 矩阵求秩的方法：1° 定义法(不为零的子式的最高阶数)；2° 矩阵的初等变换法(可以行列初等变换并用)；3° 利用向量组求秩法(矩阵的秩等于它的行向量组或列向量组的秩).

(2) 证明有关矩阵秩的命题常用的定理与公式：

(ⅰ) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则 $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

(ⅱ) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})-n\leqslant r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min[r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})].$$

(ⅲ) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times s$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

(ⅳ) $r(\boldsymbol{A})=r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$，$k\neq 0$ 的常数.

(ⅴ) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵，且可逆，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{-1})=n$.

(ⅵ) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等变换不改变矩阵的秩.

证明不等式的思路：

思路之一：通过矩阵的初等变换化为矩阵的最简型，再进行分析.

思路之二：利用分块矩阵的乘法，结合向量组秩不等式性质进行分析(秩不等式性质：向量组 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的秩分别为 r_1,r_2，若 $\boldsymbol{A}$ 组可由 $\boldsymbol{B}$ 组线性表示，则 $r_1\leqslant r_2$)，或结合齐次方程组进行分析.

证明等式的思路：

1°　$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{B})$ 且 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{B})$.

2°　$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=n\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\ \Rightarrow\ r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n,\\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{E}\ \Rightarrow\ r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\geqslant n,\text{其中 } k \text{ 为常数.}\end{cases}$

【例 2.19】 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

【证】 设 $r(\boldsymbol{A})=r$，$r(\boldsymbol{B})=s$，则存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 及 s 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$，使

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix},$$

同理，存在 s 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_2$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_2$，使

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix},$$

于是　$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AB}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1})\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}_2$，令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}=(\boldsymbol{C}_{ij})_{s\times s}$，

即 $$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AB}\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{ss}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1s} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rs} & 0\\ 0 & & 0 & 0\end{bmatrix},$$

故 $$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AB}\boldsymbol{Q}_2)=r\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rs}\end{bmatrix}\leqslant\min(r,s)=\min[r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})].$$

【另证】 证 $\boldsymbol{C}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times s}\cdot\boldsymbol{B}_{s\times n}$，即

$(\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)\boldsymbol{B}$

其中 C_j、a_j 分别是矩阵 A 的列向量，上式表明 C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示，由向量组秩的不等式性质可知 $r(C) \leqslant r(A)$.

又由 $C' = B'A'$，按已证结论结论有 $r(C') \leqslant r(B')$，即 $r(C) \leqslant r(B)$.

故 $r(C) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$.

【例 2.20】 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2 - A = 2E$，E 为 n 阶单位矩阵，证明：$r(2E-A)+r(E+A)=n$.

【证】 因为 $(2E-A)(E+A) = 2E + A - A^2 = O$，

所以 $r(2E-A)+r(E+A) \leqslant n$. ①

又因为 $(2E-A)+(E+A) = 3E$，

所以 $r(2E-A)+r(E+A) \geqslant r(3E) = n$. ②

故 $r(2E-A)+r(E+A) = n$.

【例 2.21】 设 P 为三阶非零矩阵，$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$，且满足 $PQ = O$，则 $r(P)$ 为

(A) $t=6$ 时，P 的秩必为 1.　(B) $t=6$ 时，P 的秩必为 2.

(C) $t \neq 6$ 时，P 的秩必为 1.　(D) $t \neq 6$ 时，P 的秩必为 2.　【　】

【解】 因为 P，Q 均为三阶方阵，又 $PQ = O$，

所以 $r(P)+r(Q) \leqslant 3$.

当 $t=6$ 时，$r(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 的秩 $=1$，于是，$r(P) \leqslant 2$，当　$t \neq 6$ 时，$r(Q) = 2$，

于是 $r(P) \leqslant 1$.

又 $r(P) \geqslant 1$（P 为三阶非零方阵），故 $r(P) = 1$，(C) 入选.

【例 2.22】 求 $A = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$ 的秩.

【解】 将矩阵 A 用初等变换化为行阶梯形矩阵.

$$A \xrightarrow[i=2,3,4]{(r_i)-(r_1)} \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ b-a & 0 & a-b & 0 \\ b-a & 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[r_1]+[r_2]+[r_3]+[r_4]} \begin{bmatrix} a+3b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} = B,$$

(ⅰ) 当 $a=b=0$ 时，$r(B)=0 \Rightarrow r(A)=0$；

(ⅱ) 当 a 与 b 至少有一个不为零时

①$a+3b \neq 0$ 且 $a-b \neq 0$ 时，$r(B)=4 \Rightarrow r(A)=4$；

②$a+3b=0$，但 $a-b\neq 0$ 时，$r(\boldsymbol{B})=3 \Rightarrow r(\boldsymbol{A})=3$；

③$a+3b\neq 0$，但 $a-b=0$ 时，$r(\boldsymbol{B})=1 \Rightarrow r(\boldsymbol{A})=1$.

题型 Ⅸ　综合题

【例 2.23】 已知 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$，

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

【解】 因为 $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$，

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \\ & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\right]^n\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -16+\frac{21}{2^n} \\ -12+\frac{14}{2^n} \end{bmatrix},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-16+\frac{21}{2^n}\right)=-16$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-12+\frac{14}{2^n}\right)=-12$.

第三章　向量

重要公式：

(1) 施密特正交化公式.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为线性无关组，则其对应的正交向量组可按如下公式求：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2,\cdots$$

(2) 过渡矩阵.

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的两组基，并且有

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{1n}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_2=a_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{2n}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\beta}_n=a_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{n2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{cases}$$

则 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$，称为旧基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到新基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

题型 I　有关向量的概念及其性质的命题

【解题提示】　(1) 本章的重要概念：向量的线性组合，向量组的线性相关与线性无关，极大线性无关组，向量空间的基，一定要记熟；(2) 重要定理：增加向量不改相关，增加分量不改无关；等价向量组等秩；被表出的无关组的秩不超过表出组向量个数，一定要深入理解并记住；(3) 两个向量组是否等价一般是通过研究它们的极大线性无关组是否等价入手.

【例 3.1】　填空题

(1) 设 $\boldsymbol{\beta}=(1,k,k^2)$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1-k,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1+k,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,k)$ 唯一线性表出，则 $k=$ ________.

(2) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(t,2,t),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,t)$，当 $t=$ ________ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；当 $t=$ ________ 时，它们线性无关.

(3) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若向量组 $l\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,m\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关，则常数 l,m 的关系是________.

(4) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2,-2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-x,-2x),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,6,0)$，若此向量组的秩为 2，则 $x=$ ________.

【解】　(1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表出的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，即

$$\begin{vmatrix}1-k&1&1\\1&1+k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=k(1-k^2)+1+1-(1+k)-(1-k)-k=-k^3\neq0,$$

故满足要求的 k 值为一切不为零的实数.

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关的充要条件是

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\t&2&t\\2&3&t\end{vmatrix}=2t+3t+2t-4-3t-t^2=-t^2+4t-4\neq0,$$

即 $t=2$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$t\neq 2$ 时线性无关.

(3) 设 ∃ 常数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1(l\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(m\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}, \quad ①$$

① 式可改写成 $(k_1l+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+mk_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，于是 $\begin{cases}k_1l+k_3=0,\\ k_1+k_2=0,\\ k_2+mk_3=0.\end{cases}$

又由于齐次线性方程组仅有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，

故其系数行列式 $\begin{vmatrix}l&0&1\\1&1&0\\0&1&m\end{vmatrix}=ml+1\neq 0 \Rightarrow ml\neq -1$，

(4) 取向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的前三个分量构成的向量组 $\widetilde{\alpha_1}=(1,1,2)$，$\widetilde{\alpha_2}=(1,3,-x)$，$\widetilde{\alpha_3}=(1,-1,6)$ 仍线性相关（因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 2，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关），于是

$$|[\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}]|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&3&-1\\2&-x&6\end{vmatrix}=18-x-2-6-x-6=0 \Rightarrow x=2.$$

【例 3.2】 单项选择题

(1) n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关的充要条件是

(A) 存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 存在一个向量它不能由其余的向量线性表示.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 任意一个向量都不能由其余的向量线性表示.　【　】

(2) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中没有零向量.

(B) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的个数 $s\leqslant n$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(D) 某向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表示法唯一.　【　】

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一零向量.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量的分量成比例.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中有一向量是其余的线性组合.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量均是其余向量的线性组合.　【　】

(4) 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，则

(A) 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使等式 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 成立.

(B) 存在一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 成立.

(C) 向量 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 对 $\boldsymbol{\beta}$ 的线性表示式不唯一.　【　】

【解】 (1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是至少存在一个向量可由其余的 $s-1$

个向量线性表出. 于是,可知该向量组线性无关的充要条件是其中任意一个向量都不能由其余的 $s-1$ 个向量线性表出. 可见(D) 入选.

本题也可用举实例的排除法求解. 例如对于(A) 显然对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$,存在不全为零的数 1,0,1,使 $1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+1\cdot$

$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$,但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 却不是线性无关,而是相关的,于是否掉(A).

同样的方法可排除(B),(C) 入选,故(D) 入选.

(2) 本题用举实例的排除法作,可知(A)、(B)、(C) 都不入选,故(D) 入选.

(3) (A),(B) 仅是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 相关的充分而非必要条件,(D) 充分而非必要,(C) 为正确选项.

(4) 向量的线性表出定义中没有对存在的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 作任何规定,因此可知(A),(B) 不入选. 同时也没有提到表示法是否唯一的问题,可见(D) 也不该入选,故(C) 入选.

题型 Ⅱ　有关线性表出判别的命题

【解题提示】 (1) 判别向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是否为向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性组合的程序:

① 令 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s$;

② 写出与上式等价的线性方程

$$\begin{cases}b_{11}k_1+b_{21}k_2+\cdots+b_{s1}k_s=a_1,\\ b_{12}k_1+b_{22}k_2+\cdots+b_{s2}k_s=a_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_{1n}k_1+b_{2n}k_2+\cdots+b_{sn}k_s=a_n.\end{cases}$$

③ 若方程组无解,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出;若方程组有解,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 的线性组合.

(2) 有关线性组合的证明题证题思路:

① 欲证 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,只需证表达式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k_{s+1}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 中 $k_{s+1}\neq0$,即可;

② 证明下面方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=b_n\end{cases}$$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_{i1}\\a_{i2}\\\vdots\\a_{in}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$;

(3) 反证法或用极大线性无关组法.

【例 3.4】　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda+3,\lambda,3\lambda+3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\lambda-1,\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,\lambda+1,\lambda+3)^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\beta}=(\lambda,2\lambda,0)^{\mathrm{T}}$，问当 λ 为何值时，(1)$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出且表达式唯一；(2)$\boldsymbol{\beta}$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；(3)$\boldsymbol{\beta}$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合，且表达式不唯一.

【解】　令 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则有

$$\begin{cases}(\lambda+3)k_1+k_2+2k_3=\lambda,\\ \lambda k_1+(\lambda-1)k_2+(\lambda+1)k_3=2\lambda,\\ (3\lambda+3)k_1+\lambda k_2+(\lambda+3)k_3=0.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda-1 & \lambda+1\\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3\end{bmatrix}.$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda-1 & \lambda+1\\ 3\lambda+3 & \lambda & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+3 & 1 & 2\\ \lambda & \lambda-1 & \lambda+1\\ \lambda & 0 & 0\end{vmatrix}=\lambda(3-\lambda).$$

(1) 当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 3$ 时，方程有唯一解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表达式唯一；

(2) 当 $\lambda=3$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}6 & 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 4 & 6\\ 12 & 3 & 6 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}3 & 2 & 4 & 6\\ 6 & 1 & 2 & 3\\ 12 & 3 & 6 & 0\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}3 & 2 & 4 & 6\\ 0 & -3 & -6 & -9\\ 0 & -5 & -10 & -24\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}3 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -9\end{array}\right],$$

$r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3,r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出；

(3) 当 $\lambda=0$ 时，$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}3 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 3 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

当 $\lambda=0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，但表达式不唯一.

题型 Ⅲ　有关线性表出的命题的证法

【解题提示】　证明方法有如下三种.

1°　定义法. 即证明表达式：$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k_{s+1}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ 中的 $k_{s+1}\neq 0$.

2°　方程组法. 即证明如下方程组有解

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=b_n\end{cases},\text{其中 }\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{bmatrix}a_{i1}\\ a_{i2}\\ \vdots\\ a_{in}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}.$$

3°　反证法.

【例 3.5】 设$\boldsymbol{\beta}$可用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表出，但不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表出，证明：$\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$线性表出.

【证】 由题设$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表出，所以存在$m$个常数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，

欲证$\boldsymbol{\alpha}_m$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$线性表出，只需证$k_m\neq 0$. 用反证法. 若不然，$k_m=0$，则$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$，即$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$表出. 矛盾，故$k_m\neq 0$，于是

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{k_m}\boldsymbol{\beta}-\frac{k_1}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}\Rightarrow \text{命题得证.}$$

【例 3.6】 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$有相同的秩，证明：$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表出.

【证】 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的秩为$r$，不妨设$\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r^*$为其极大线性无关组，则

秩$(\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r^*,\boldsymbol{\beta})=$秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})=r$.

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r^*,\boldsymbol{\beta}$的向量个数为$r+1$，故$\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r^*,\boldsymbol{\beta}$线性相关，而$\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r^*$线性无关. 故$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r^*$线性表出. 又由于$\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r^*$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$可互相线性表出，故$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表出.

【例 3.7】 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$有相同的秩，证明：$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表出.

【证】 “$\Rightarrow$”

设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，$\boldsymbol{\beta}$为任一$n$维向量，则$n+1$个$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$线性相关，于是$\exists$不全为“0”的$n+1$个常数：$k_1,k_2,\cdots,k_n,k$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},$$

$k\neq 0$(若不然$k=0$，由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关 $\Rightarrow$ $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$与$k_1,k_2,\cdots,k_n,k$不全为“0”矛盾，) 于是

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_n}{k}\boldsymbol{\alpha}_n.$$

“$\Leftarrow$”

设任一n维向量$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表出，不妨设$\boldsymbol{\beta}$为$n$阶单位阵$\boldsymbol{E}$的各列向量$\boldsymbol{\varepsilon}_j(j=1,2,\cdots,n)$，即$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表出，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$可由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$线性表出，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$等价. 从而秩$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=$秩$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=n$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.

题型 Ⅳ　向量线性相关性的证法

【解题提示】 思路之一(定义法) 证题程序如下：

(1) 令$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，其中$k_1,k_2,\cdots,k_m$为常数.

(2) 将上式展开整理，使之能直接利用题设条件，判断$k_1,k_2,\cdots,k_m$的取值情况，或者对上式作某种变换(或运算)，再利用题设条件，判断$k_1,k_2,\cdots,k_m$的取值情况，从而得出向量组的线性相关或无关.

思路之二(方程组法) 将线性相关性的问题转化为齐次方程组有无零解来分析.

思路之三(反证法).

【例 3.8】 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}(s\geqslant 1)$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可表示为 $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+t_i\boldsymbol{\alpha}_{i+1}(i=1,2,\cdots,s)$，其中 $t_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是实数，试证向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

【证】 设 $\exists s$ 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=\mathbf{0}$，

即 $\quad k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+t_1\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_3(\boldsymbol{\alpha}_s+t_s\boldsymbol{\alpha}_{s+1})=\mathbf{0}$，

展开，按 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 整理，得

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1t_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{s-1}t_{s-1}+k_s)\boldsymbol{\alpha}_s+k_st_s\boldsymbol{\alpha}_{s+1}=\mathbf{0}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 线性无关，

所以 $$\begin{cases}k_1=0,\\ k_1t_1+k_2=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_{s-1}t_{s-1}+k_s=0,\\ k_st_s=0.\end{cases}\Rightarrow\quad k_1=k_2=\cdots=k_s=0.$$

故 $\quad \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关.

【例 3.9】 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可由该向量组线性表出，而向量 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由这个向量组线性表出. 证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,l\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关(其中 l 为常数).

【证】 设 $\exists m+1$ 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m,k$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+k(l\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)=\mathbf{0}, \qquad ①$$

则必有 $\quad k=0$，若不然 $k\neq 0$，则

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{k}\boldsymbol{\alpha}_m-l\boldsymbol{\beta}_1,$$

又 $\quad \boldsymbol{\beta}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$ 代入上式，得

$$\boldsymbol{\beta}_2=-\left(\frac{k_1}{k}+\lambda_1 l\right)\boldsymbol{\alpha}_1-\left(\frac{k_2}{k}+\lambda_2 l\right)\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\left(\frac{k_m}{k}+\lambda_m l\right)\boldsymbol{\alpha}_m,$$

与假设 $\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出矛盾.

故 $\quad k=0$，于是 ① 变为 $\quad k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，所以

$$k_1=k_2=\cdots=k_m=0,$$

由 ① 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,l\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关.

【例 3.10】 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_i,a_i^2,\cdots,a_i^n),i=1,2,\cdots,m,m\leqslant n$，试证：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个互不相等且不为零的常数.

【证】 由题设 $$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(a_1,a_1^2,\cdots,a_1^n),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(a_2,a_2^2,\cdots,a_2^n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m=(a_m,a_m^2,\cdots,a_m^n),\end{cases}\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix},$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n\\ a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_m & a_m^2 & \cdots & a_m^n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_m\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_m & \cdots & a_m^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2,\cdots,a_m \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(a_j - a_i) \neq 0.$$

故　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

【例 3.11】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 n 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，试证：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【证】　由

$$\begin{cases}\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{A\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0},\\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1,\\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2,\end{cases} \quad ①$$

设存在三个常数 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \quad ②$$

用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘上式两边，得

$$k_1(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0},$$

由 ① 有　$k_2\boldsymbol{\alpha}_1 + k_3\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{0}$.　③

再用 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 左乘上式两边，得

$$k_3\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{0} \xrightarrow{\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \boldsymbol{0}} k_3 = 0.$$

依次代入 ②，③ 得，$k_2 = 0, k_1 = 0$，即

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$，故　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【例 3.12】　设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 均分别与 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 正交，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

【证】　设 ∃ 常数 k_1,k_2,k_3,k_4，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}. \quad ①$$

分别用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 与上式两边作内积，得

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3) + k_4(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4) = 0, \quad ②$$

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) + k_4(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4) = 0, \quad ③$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别与 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 正交，所以 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4) = 0$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4) = 0$，于是，由 ②，③ 分别得出

$$\begin{cases}k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) = 0,\\ k_1(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) = 0.\end{cases}$$

因为 $\begin{vmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)\end{vmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) - (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)^2 > 0$，

所以 $k_1 = k_2 = 0$，代入 ① 式，得

$$k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0} \xrightarrow{\text{因为 }\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\text{ 无关}} k_3 = k_4 = 0.$$

由以上可知 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

【例 3.13】　设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，有 4 个不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$. 对应的特征向量依次为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. 令 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$.

证明：$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

【证】　因为 $\boldsymbol{A\alpha}_i = \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i \quad (i = 1,2,3)$，

所以 $\boldsymbol{A\beta} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4) = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4$，

$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4) = \lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2 + \lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3 + \lambda_4^2\boldsymbol{\alpha}_4$，

$A^3\boldsymbol{\beta}=\lambda_1^3\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^3\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4^3\boldsymbol{\alpha}_4$,

设 ∃ 四个常数 k_1,k_2,k_3,k_4,使

$k_1\boldsymbol{\beta}+k_2A\boldsymbol{\beta}+k_3A^2\boldsymbol{\beta}+k_4A^3\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$,

即　$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)+k_2(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_4)+k_3(\lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^2\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4^2\boldsymbol{\alpha}_4)+k_4(\lambda_1^3\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2^3\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3^3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4^3\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0}$,按 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 整理

$\Rightarrow\ (k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2+k_4\lambda_1^3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2+k_4\lambda_2^3)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2+k_4\lambda_3^3)\boldsymbol{\alpha}_3+(k_1+k_2\lambda_4+k_3\lambda_4^2+k_4\lambda_4^3)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$.

由于属于不同特征值的特征向量线性无关,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,于是

$$\begin{cases}k_1+k_2\lambda_1+k_3\lambda_1^2+k_4\lambda_1^3=0,\\k_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_2^2+k_4\lambda_2^3=0,\\k_1+k_2\lambda_3+k_3\lambda_3^2+k_4\lambda_3^3=0,\\k_1+k_2\lambda_4+k_3\lambda_4^2+k_4\lambda_4^3=0.\end{cases}\qquad ①$$

其系数行列式 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1&\lambda_1^2&\lambda_1^3\\1&\lambda_2&\lambda_2^2&\lambda_2^3\\1&\lambda_3&\lambda_3^2&\lambda_3^3\\1&\lambda_4&\lambda_4^2&\lambda_4^3\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)\neq0$,

因此方程组 ① 仅有零解 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$,故　　命题得证.

【例 3.14】 设 A 是 n 阶正定矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非零的 n 维列向量,且 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j,i,j=1,2,3)$,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

【证】 设 ∃ 常数 k_1,k_2,k_3,使

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,

将上式两边左乘以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}A$,得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}_3=0,$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}_j=0(i\neq j,i,j=1,2,3)$,可知上式后两项为“0”,于是

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}_1=0$,

由于 A 正定,$\boldsymbol{\alpha}_1\neq0,\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{\alpha}_1>0$,从而 $k_1=0$.

同理可证:$k_2=k_3=0$,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

题型 V　向量组的极大线性无关组及向量组秩的有关命题的证明

【解题提示】 (1) 求极大线性无关组的方法:利用矩阵行的初等变换(切不可用列的初等变换).

解题程序:① 以向量组中各向量作为矩阵的列;② 对所构成的矩阵施行行的初等变换,将矩阵化为阶梯形矩阵;③ 阶梯形矩阵中,每一台阶取一列,则对应的向量所构成的向量组即为极大线性无关组.

(2) 极大线性无关组的证明方法.

(ⅰ) 定义法(即要证明两点:① 所给的部分组线性无关;② 向量组中任一向量可由该部分组线性表出).

(ⅱ) 利用等价性证明(若已知某向量组为向量组 T 的极大线性无关组,且又可证明向量组 T 的部分组与某向量组等价,则可证该部分组为向量组 T 的极大无关组).

【例 3.15】 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(7,0,14,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(5,1,6,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,-1,4,1)$，求：(1)向量组的秩；(2)求此向量组的一个极大线性无关组，并把其余的向量分别用该极大无关组线性表示.

【解】
$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\3&0&-1&1&-1\\2&14&0&6&4\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&-21&-7&-14&-7\\0&0&-4&-4&0\\0&3&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&3&1&2&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

(1) 从台阶的个数，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3.

(2) 在每个台阶中选一对应向量，例如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 均可作为极大线性无关组.

不妨选 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 作为极大线性无关组，将 $\boldsymbol{B}$ 化为标准形

$$\boldsymbol{B}\to\begin{bmatrix}1&7&2&5&2\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故 $\quad\boldsymbol{\alpha}_4=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2.$

【3.16】 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}1&4\\0&3\\-4&2\end{bmatrix}$，验证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并把 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 用这个基线性表示.

【解】
$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=\left[\begin{array}{ccc:cc}2&2&-1&1&4\\2&-1&2&0&3\\-1&2&2&-4&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}-1&2&2&-4&2\\2&-1&2&1&4\\2&-1&2&0&3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:cc}-1&2&2&-4&2\\0&6&3&-7&8\\0&3&6&-8&7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&-2&-2&4&-2\\0&0&-9&9&-6\\0&3&6&-8&7\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&-2&-2&4&-2\\0&1&2&-\frac{8}{3}&\frac{7}{3}\\0&0&1&-1&\frac{2}{3}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&1\\0&0&1&-1&\frac{2}{3}\end{array}\right],$$

因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，且有

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{4}{3}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

【例 3.17】 设向量组Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的秩为 $r(r>1)$，证明向量组Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 的秩也为 r.

【解题提示】 等价向量组的秩相等，因此要证两向量的秩相等，可从证明两向量组等价入手.

【证】 显然向量Ⅱ可由向量组Ⅰ线性表示，以下证明向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示.

将向量组Ⅱ中各向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的表示式相加，得

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m=(m-1)(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m)$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m),$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha}_i=\frac{1}{m-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_m)-\boldsymbol{\beta}_i\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

这表示向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ表示，于是向量组Ⅰ与Ⅱ等价，故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的秩也为 r.

【例 3.18】 设向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；向量组 Ⅱ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；向量组 Ⅲ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$，若 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=3,r(\text{Ⅲ})=4$. 证明:$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=4$.

【证】 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=4$ 等价于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，现证之. 设 ∃ 四个常数 k_1,k_2,k_3,k_4，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0},\qquad ①$$

因为 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=3$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，因此 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一表示，即存在常数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3,\qquad ②$$

将 ② 代入 ① 并整理，得

$$(k_1-\lambda_1k_4)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-\lambda_2k_4)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-\lambda_3k_4)\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{0},$$

又由 $r(\text{Ⅲ})=4$，可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，于是

$$\begin{cases}k_1-\lambda_1k_4=0,\\k_2-\lambda_2k_4=0,\\k_3-\lambda_3k_4=0,\\k_4=0.\end{cases}\Rightarrow\quad k_1=k_2=k_3=k_4=0.$$

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，即 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=4$.

题型Ⅵ　求过渡矩阵与向量的坐标

【解题提示】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的两组基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的变换公式为 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{Q}$，其中

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{Q}$ 称为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n].$$

【例 3.19】　求 $\mathbf{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)$ 和基底 $\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)$ 下的坐标变换公式.

【解】　设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在两基底下的坐标分别为 (x_1,x_2,x_3) 和 (y_1,y_2,y_3)，由公式 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix},$$

故　坐标变换公式为
$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}.$$

【例 3.20】　已知 $\mathbf{R}^3$ 中的两个基底分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,b,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,c)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,-1,x)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(y,-1,1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-1,z,1)$，且由基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基底 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡阵为 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&2\\0&2&0\end{bmatrix}$，试求 a,b,c 与 x,y,z 的值.

【解】　由题设，有　$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{Q}$，

即
$$\begin{bmatrix}-1&y&-1\\-1&-1&z\\x&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0&0\\1&b&0\\1&1&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\0&1&2\\0&2&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-1=-a,\\y=a,\\-1=1+b,\\z=-1+2b,\\x=-1,\\1=1+1+2c,\end{cases}$$

故　$a=1,b=-2,c=-\dfrac{1}{2},x=-1,y=1,z=-5.$

题型 Ⅶ* 　有关正交矩阵命题的证明

【解题提示】　用定义证明，即验证 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$）.

【例 3.21】　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维非零列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，试证：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为正交矩阵.

【证】　因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，

所以 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{E}-\dfrac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)$

$$=\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\left(\frac{2}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\right)^2\cdot\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

$$\xrightarrow[\text{所以 }\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}]{\text{因为 }\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\text{ 为非零实数}}\boldsymbol{E}-\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\frac{4}{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}.$$

故　$\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

【例 3.22】　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中 $(n-1)$ 个线性无关向量组，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 正交，证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

【证】　由定理：向量个数大于其维数的向量一定线性相关可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 这 $(n$

$+1)$ 个 n 维向量必线性相关，于是 $\exists(n+1)$ 个不全为"0"的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},\lambda_1,\lambda_2$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，　①

又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关，λ_1,λ_2 必不全为"0"(若不然，$\lambda_1=\lambda_2=0$，则 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$ 中必不全为"0"，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性相关，矛盾)．① 式的两边分别与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 作内积，由正交条件，有

$\lambda_1(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=0,\lambda_1(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)+\lambda_2(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=0$，

$\xrightarrow{\text{由内积性质}}$ $(\boldsymbol{\beta}_1,\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2)=(\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=0$，　②

同理可知　$\Rightarrow$　$(\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=0$，　③

$\lambda_1\times$② $+\lambda_2\times$③，由内积运算性质，可得　$(\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2,\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{0}$，

$\Rightarrow$　$\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$，又 λ_1,λ_2 不全为 0，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关．

第四章　线性方程组

有关线性方程组解的重要结论：

非齐次线性方程组　$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，　　(1)

其导出组(即齐次方程组)　$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.　　(2)

$\boldsymbol{A}$—— 系数矩阵，$\bar{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{b})$—— 增广矩阵.

(Ⅰ)解的性质：

1°　导出组解的线性组合仍为导出组的解；

2°　非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的任两个解的差为其导出组的解.

(Ⅱ)通解的结构：

1°　导出组的 n 个线性无关解的线性组合为其通解

$$Y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为任意常数，$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的 n 个线性无关解.

2°　非齐次线性方程组的通解等于其导出组的通解与其任一特解 $y^*(x)$ 之和，即

$$y = Y + y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) + y^*(x).$$

(Ⅲ)关于 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 解的讨论：

1°　若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = n$(未知数个数)，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解；

2°　若 $r(\boldsymbol{A}) \neq r(\bar{\boldsymbol{A}})$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解；

3°　若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\bar{\boldsymbol{A}}) = r < n$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解，其基础解系所含解向量个数为 $(n - r)$ 个.

题型Ⅰ　有关线性方程解的概念及性质的命题

【解题提示】　概念及性质务必娴熟.

【例 4.1】　填空题

(1) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为"0"，且 $r(\boldsymbol{A}) = n - 1$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX} = 0$ 的通解________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}| = 0$，且 a_{ki} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ki} \neq 0$，则 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的通解________.

(3) 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是它的 3 个解向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$，则通解________.

(4) 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq 0$，且 $\boldsymbol{B}$ 的每一个列向量都是方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的解，则 ①$\lambda =$ ________；② $|\boldsymbol{B}| =$ ________.

(5) 方程组 $AX=0$ 以 $\xi_1=(1,0,1)^T,\xi_2=(0,1,-1)^T$ 为其基础解系，则 A 为______.

(6) 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是方程 $AX=b$ 的解，若 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 也是 $AX=b$ 的解，则 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 应满足条件______.

【解】 (1) 因为 $r(A)=n-1$，所以齐次方程组的基础解系所含向量的个数 $n-(n-1)=1$，又由题设

$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

显然　$a_{i1}\cdot 1+a_{i2}\cdot 1+\cdots+a_{in}\cdot 1=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

显然　$\xi^*=(1,1,\cdots,1)^T$ 是 $AX=0$ 的一个非零解.

故通解为　$\xi=k\xi^*=k\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$.

(2) 因为 $|A|=0,A_{ki}\neq 0$，所以 $r(A)=n-1$，于是 $AX=0$ 的基础解系所含解向量的个数为 $n-(n-1)=1$.

又　因为 $a_{j1}A_{k1}+a_{j2}A_{k2}+\cdots+a_{jn}A_{kn}=\begin{cases}|A|=0, & j=k\\0, & j\neq k.\end{cases}$

所以 $(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})^T$ 为 $AX=0$ 的非零解，可作为基础解系.

故　$AX=0$ 的通解为 $\xi=k\begin{bmatrix}A_{k1}\\A_{k2}\\\vdots\\A_{kn}\end{bmatrix}$.

(3) 因为 $r(A)=3$，　所以导出组 $AX=0$ 的基础解系所含向量个数 $4-3=1$，由解的性质，可知

$$(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1-\alpha_3)=2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3)=\begin{bmatrix}2\\18\\18\\16\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\9\\9\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\9\\9\\7\end{bmatrix}\text{—— 齐次方程组解，}$$

故　非齐次方程的通解为　$k\begin{bmatrix}1\\9\\9\\7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\9\\9\\8\end{bmatrix}$.

(4) 因为三阶方阵 $B\neq 0$，所以 B 的列向量 β_1,β_2,β_3 不全为"0"，而方程组(n 个未知，n 个方程) 有非"0"解充要条件系数行列式 $=0$，即 $\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\2 & -1 & \lambda\\3 & 1 & -1\end{vmatrix}=1-4+6\lambda-6-\lambda+4=0\Rightarrow\lambda=1$.

又因为　B 的每一个列向量都是方程组 $AX=0$ 的解，

所以　$AB=0$，由 $A\neq 0$，必有 $|B|=0$，若不然 $|B|\neq 0$，则 B 可逆，于是

在 $AB=0$ 的两边右乘以 B^{-1}　得　$A=0$,与条件矛盾,故必有 $|B|=0$.

(5) 这是一个反求方程组的问题,亦即求系数矩阵 A 的问题,矩阵 A 的求法如下:

① 将所给的基础解系为行向量作矩阵 B;

② 求方程组 $BX=0$ 的基础解系;

③ 将第二步所求得的基础解系为行向量作矩阵,则该矩阵即为所求矩阵 A.

令 $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$. 解方程组 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=x_3\end{cases}$,得 $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$,

$A=\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}=(-1,1,1)$,故　所求方程组为　$-x_1+x_2+x_3=0$.

(6) $A(k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s)=k_1\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_s\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$,

$\Rightarrow\quad k_1+k_2+\cdots+k_s=1$.

【例 4.2】　选择题

(1) 要使 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 都是线性方程组 $AX=0$ 的解,只要系数矩阵 A 为

(A) $[-2,1,1]$.　　(B) $\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$.　　【　】

(2) n 元线性方程组 $AX=b$ 有唯一解的充要条件

(A) $r(\bar{A})=n$.

(B) $r(A)=n$.

(C) A 为方阵且 $|A|\neq0$.

(D) $r(A)=n$,且 b 可由 A 的列向量组线性表示.　　【　】

(3) 已知 3 阶实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足条件:

① $|A|=1$;② $a_{33}=-1$;③ $a_{ij}=A_{ij}\ (i,j=1,2,3)$,其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式,则方程组 $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 的解是

(A) $\begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.　　【　】

(4) 设一个 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的 $r(A)=n-3$,且 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为此方程组的三个线性无关解,则此方程的基础解系是

(A) $-\boldsymbol{a}_1,2\boldsymbol{a}_2,3\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2$.

(B) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1$.

(C) $\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2,-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_1,-3\boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{a}_2$.

(D) $2\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2,-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3$.　　【　】

【解】 (1) 仿例 4.1(5),令 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$,

对应方程组 $\begin{cases}x_1=-2x_3\\x_2=x_3\end{cases}$,$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}=[-2,1,1]$,

可知 (A) 入选.

(2) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$.

显然(A),(B) 只是必要条件,而非充分条件,(C) 是充分而非必要条件,$\boldsymbol{A}$ 可以不是方阵,故(D) 入选.

(3) 由 A_{ij} 应马上联想到 $\boldsymbol{A}^*$ 及行列式按行(或列)展开.

显然 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}\xlongequal{\text{因为 } a_{ij}=A_{ij}}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,

于是 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$,又 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\xlongequal{n=3}|\boldsymbol{A}|^2\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2$,

$\Rightarrow |\boldsymbol{A}|=0$(舍去),$|\boldsymbol{A}|=1$,又 $1=|\boldsymbol{A}|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}\xlongequal{a_{ij}=A_{ij}}$
$a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=a_{31}^2+a_{32}^2+1\Rightarrow a_{31}^2+a_{32}^2=0\Rightarrow a_{31}=a_{32}=0$,

因为 $|\boldsymbol{A}|=1$,由 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\xlongequal[\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}]{|\boldsymbol{A}|=1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{31}\\a_{32}\\a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$.

故 可知(C) 入选.

(4) 因为 $r(\boldsymbol{A})=n-3$,所以基础解系所含解向量个数 $=n-(n-3)=3$. 又由于解的性质,可知四组备选答案中任何一组的三个向量均为解向量. 现在要验证的是哪组解线性无关. (A) 组以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 为坐标所对应的系数行列式

$\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\1&-2&3\end{vmatrix}=-6\neq0$.

故 $-\boldsymbol{a}_1,2\boldsymbol{a}_2,3\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2$ 线性无关,于是(A) 入选.

题型 Ⅱ 含有参数的线性方程组解的讨论

【解题提示】 (1) 含参数的 n 个未知数 n 个方程的线性方程组,当 $n\leqslant3$ 时,通常利用系数行列式进行分析讨论:当系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq0$ 时,方程组有唯一解,用克莱姆法则求之;当系数行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时(此时参数值已确定),则利用增广矩阵行的初等变换化为梯形阵判别有无解,有解时求出通解.

(2) 当方程的个数 $\neq$ 未知数的个数,或虽然二者相等,但 $n>3$ 时,通常是对方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})$ 施以行的初等变换化为梯形阵,然后再对参数讨论方程组有无解,有解时求出解. 变量的系数中不含参数的方程也用此法.

【例 4.3】　λ 为何值时，方程组 $\begin{cases}2x_1+\lambda x_2 &=4,\\ \lambda x_1-x_2+x_3 &=2,\\ 5x_1-2x_2-x_3 &=-1.\end{cases}$

有唯一解，无解，有无穷多解？并在有无穷多解时，写出方程组的通解.

【解】　这是三个未知数三个方程的线性方程组，用方法(1)求解简便.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&\lambda&0\\ \lambda&-1&1\\ 5&-2&-1\end{vmatrix}=2+5\lambda+4+\lambda^2=\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3),$$

(ⅰ) 当 $\lambda\neq-3$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，方程组有唯一解；

(ⅱ) 当 $\lambda=-2$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c}2&-2&0&4\\ -2&-1&1&2\\ 5&-2&-1&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&2\\ 0&-3&1&6\\ 0&3&-1&-11\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&2\\ 0&-3&1&6\\ 0&0&0&-5\end{array}\right]$$

$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3, r(\boldsymbol{A})=2$，故方程组无解；

(ⅲ) 当 $\lambda=-3$ 时

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc|c}2&-3&0&4\\ -3&-1&1&2\\ 5&-2&-1&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}2&-3&0&4\\ -3&-1&1&2\\ 0&0&0&-3\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}2&-3&0&4\\ -1&-4&1&6\\ 0&0&0&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&-6\\ 2&-3&0&4\\ 0&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&-1&-6\\ 0&-11&2&16\\ 0&0&0&1\end{array}\right],$$

$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3, r(\boldsymbol{A})=2$，故方程组无解.

【例 4.4】　问 a,b 为何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_2+2x_3+2x_4=1\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$

有唯一解，求出唯一解；无解；有无穷多解，并写出通解.

【解】

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\ 0&1&2&2&1\\ 0&-1&a-3&-2&b\\ 3&2&1&a&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\ 0&1&2&2&1\\ 0&-1&a-3&-2&b\\ 0&-1&-2&a-3&-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&0\\ 0&1&2&2&1\\ 0&0&a-1&0&b+1\\ 0&0&0&a-1&0\end{array}\right],$$

(ⅰ) 当 $a\neq1$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b-a+2}{a-1}, x_2=\frac{a-2b-3}{a-1}, x_3=\frac{b+1}{a-1}, x_4=0.$$

(ⅱ) 当 $a=1, b\neq-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解.

(ⅲ) 当 $a=1,b=-1$ 时

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&-2&-2&-1\\3&2&1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2-x_3-x_4\\x_2=-2x_3-2x_4+1\end{cases},\quad 特解\ \boldsymbol{x}^*=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix},$$

导出组的基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$.

故方程组的通解为 $\boldsymbol{\eta}=k_1\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$,其中 k_1,k_2 为任意常数.

题型 Ⅲ 有关基础解系的命题证明

【解题提示】 基础解系的证法有:

(1) 定义法:即证明一组向量为线性无关的解向量,且任一解向量都可由它线性表出.

(2) 设 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为 n 个未知数的齐次线性方程组,$r(\boldsymbol{A})=r$,欲证 $(n-r)$ 个解向量为基础解系只需证它们线性无关即可.

【例 4.5】 设 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量,$r(\boldsymbol{A})=r$,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

【证】 显然,$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0$ 为 $n-r$ 个向量.

由题设和解的性质可知该向量组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量组.以下证明其线性无关.

设 $\exists\, n-r$ 个常数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$,使

$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0)=\boldsymbol{0}$,

$\Rightarrow k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\alpha}_0=\boldsymbol{0}$,

因为 $\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 线性无关,

所以 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0$ 线性无关,

故 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_0,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}-\boldsymbol{\alpha}_0$ 为导出组的基础解系.

【例 4.6】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,其 m 个行向量是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶可逆矩阵,证明:$\boldsymbol{BA}$ 的行向量也是 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

【证】 由题设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量是 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 的解,即 $\boldsymbol{CA}^{\mathrm{T}}=0$,

则 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{CA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{CA}^{\mathrm{T}})\cdot\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=0\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=0$,

即 $\boldsymbol{BA}$ 的行向量是 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 的解.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的行向量是 $\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,所以 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关,于是 $m=r(\boldsymbol{A})$

$= n - r(\boldsymbol{C})$.

又　$\boldsymbol{B}$ 可逆，于是 $r(\boldsymbol{BA}) = r(\boldsymbol{A}) = m = n - r(\boldsymbol{C})$，即 $\boldsymbol{BA}$ 的行向量线性无关，其个数恰好等于 $n - r(\boldsymbol{C})$，故命题得证.

【例 4.7】　设齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0, \end{cases}$ 的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

设 $M_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 i 列所得到的 $n-1$ 级子式. 证明：

(1) $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解向量；

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$，则方程组的所有解向量是 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数.

【证】　作 n 阶行列式

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}, i = 1,2,\cdots,n-1.$$

因为　D_i 的第一行与第 $i+1$ 行是相同的，所以 $D_i = 0$

D_i 的第一行元素的代数余子式依次为　$M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n$，

将 D_i 按第一行展开，得

$$a_{i1}M_1 + a_{i2}(-M_2) + \cdots + a_{in}[(-1)^{n-1}M_n] = 0, \quad (i = 1,2,\cdots,n-1)$$

这说明 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 满足第 $i(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 个方程，故它是方程组的一个解.

(2) 因为 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$，所以方程组的基础解系所含解向量的个数为 $n-(n-1) = 1$，同时因为 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$，说明 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $(n-1)$ 阶子式 $\neq 0$，即 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 不全为"0"，于是 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个非零解，它可作为方程组的一个基础解系. 故方程组的解都是 $(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$ 的倍数.

注　① 涉及代数和余子式的问题，当矩阵的行或列数不相同时，如本题这样构造行列是一种常用的方法，这种证明称为构造性证明法.

② 当提及方程组的解是某形式解的倍数时，应联想到某形式解是方程组的基础解系.

题型Ⅳ 涉及两个方程组解之间关系的命题的讨论

【解题提示】 这类问题的解决通常是通过两方程组的基础解系来分析.同时还应理解线性方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）有非零公共解的含义.

1° 方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）所构成的大联立方程组的非零解，即为方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的非零公共解.

2° 令方程组（Ⅰ），（Ⅱ）的通解表达式相等，求出非零公共解，即为方程组（Ⅰ），（Ⅱ）的非零公共解.

3° 将已知的通解表达式代入另一个未求出通解的方程组中，确定出通解表达式中基础解系的系数，即得两方程组的非零公共解.

【例 4.8】 设有两个四元齐次线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\end{cases}\quad 与 \quad (\text{Ⅱ})\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2-x_3+x_4=0,\end{cases}$$

求：(1) 线性方程组（Ⅰ）的基础解系；

(2) 试问方程组（Ⅰ），（Ⅱ）是否有非零公共解？若有，求出所有非零公共解；若没有，则说明理由.

【解】 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$，

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=x_4\end{cases}，基础解系为\quad \boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

(2) 求解方程（Ⅰ），（Ⅱ）构成的联立方程组，其系数矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&1&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

相应的齐次方程组为 $\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=x_4\\x_3=2x_4\end{cases}$，基础解系为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$.

故 （Ⅰ）、（Ⅱ）的非零公共解为 $k\boldsymbol{\xi}=k\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$，$k\neq0$.

【例 4.9】 设四元线性方程组（Ⅰ）为 $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$，又已知齐次线性方程组（Ⅱ）的通解为 $k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)$.

(1) 求方程组（Ⅰ）的基础解系；

(2) 问线性方程组(Ⅰ),(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,则求出所有非零公共解;若没有,则说明理由.

【解】 (1) 方程组(Ⅰ)的系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix},\text{相应的方程组为}\begin{cases}x_1=-x_4,\\x_2=x_4,\end{cases}$$

基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$,通解为 $C_1(0,0,1,0)+C_2(-1,1,0,1)$.

(2) 解法一: 令 $C_1(0,0,1,0)+C_2(-1,1,0,1)=k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)$,

$$\Rightarrow\begin{cases}k_2=C_2,\\k_1+2k_2=C_2,\\k_1+2k_2=C_1,\\k_2=C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_2-C_2=0,\\k_1+2k_2-C_2=0,\\k_1+2k_2-C_1=0,\\k_2-C_2=0,\end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}\to\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\1&2&0&-1\\1&2&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\1&2&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\1&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

同解　方程组为 $\begin{cases}k_1=-C_2,\\k_2=C_2,\\C_1=C_2,\end{cases}$　令　$k=C_2$,则方程组的解为 $k(-1,1,1,1),k\neq0$,此即为方程组(Ⅰ)、(Ⅱ)的所有非零公共解.

【另解】 先求出以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 为基础解系的齐次方程组.

令 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\-1&2&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-2&-1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&0\end{bmatrix}$,

对应的齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1=x_4\\x_2=-x_3\end{cases}$,基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$.

于是,得出方程组(Ⅱ) $\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\mathbf{0}$,即 $\begin{cases}x_1+x_4=0,\\-x_2+x_3=0,\end{cases}$

求解方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0,\\x_1+x_4=0,\\-x_2+x_3=0,\end{cases}$ 的基础解系.

系数矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&0&0&1\\0&-1&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\1&1&0&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，$\begin{cases}x_1=-x_4,\\x_2=x_4,\\x_3=x_4,\end{cases}$

基础解系为 $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，其通解为 $\boldsymbol{x}=k(-1,1,1,1),k\neq0$，此即为方程组（Ⅰ）、（Ⅱ）的所有非零公共解为 $k(-1,1,1,1),k\neq0$ 为任意常数.

【例 4.9】 已知线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0,\end{cases}$$

的一个基础解系为 $(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$.

试写出线性方程组

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0,\\b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0.\end{cases}$$

的通解，并说明理由.

【解】 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1,2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n,2n}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1,2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{n,2n}\end{bmatrix}$，

则方程组（Ⅰ）、（Ⅱ）可分别简记为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$.

由题设可知 $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=0\Rightarrow(\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}^{\mathrm{T}}=0$.

于是可知，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量的转置为（Ⅱ）即 $\boldsymbol{BY}=0$ 的 n 个解向量.

由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $=2n-r(\boldsymbol{B})\xlongequal{r(\boldsymbol{B})=n}n$，则 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行向量线性无关，从而它们的转置构成 $\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 故方程组（Ⅱ）的通解为

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{KA}^{\mathrm{T}}，其中\ \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{bmatrix}.$$

题型Ⅴ 综合题

【例 4.10】 设 $\begin{cases}x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}\\y_n=4x_{n-1}+3y_{n-1}\end{cases}$，且 $x_0=2,y_0=1$，求 x_n,y_n.

【解】 $\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{n-1}\\y_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}x_{n-2}\\y_{n-2}\end{bmatrix}=\cdots=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，

求解特征方程 $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda+1)(\lambda-5)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$.

（ⅰ）属于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量为

$$\begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},x_1=-x_2,\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix};$$

（ⅱ）属于 $\lambda_2=5$ 的特征向量为

$$\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，

故 $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.

$$\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5^n\\ (-1)^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5^n+(-1)^n\\ 2\cdot 5^n-(-1)^n\end{bmatrix}.$$

得 $x_n=5^n+(-1)^n$，$y_n=2\cdot 5^n-(-1)^n$.

【例 4.11】 利用克莱姆法则证明 n 次多项式不能有多于 n 个互异的零点.

【证】 设 n 次多项式为 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. 用反证法证明. 若不然，设 $f(x)$ 有 $n+1$ 个互异的零点：$x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$，即 $f(x_i)=0(i=1,2,\cdots,n+1)$，$x_i\neq x_j(i\neq j)$.

亦即
$$\begin{cases}a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_1+a_n=0,\\ a_0x_2^n+a_1x_2^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_2+a_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_0x_{n+1}^n+a_1x_{n+1}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_{n+1}+a_n=0.\end{cases}$$

这可看作关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的 $n+1$ 个变量的齐次线性方程组，其系数行列式为

$$\begin{vmatrix}x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1\\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \cdots & x_{n+1} & 1\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i)\neq 0.$$

于是，$a_0=a_1=\cdots=a_n=0$，$f(x)\equiv 0$ 与 $f(x)$ 为 n 次多项式矛盾.

故命题得证.

【例 4.12】 证明方程组
$$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ \frac{1}{2}x_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\\ \frac{1}{2}x_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3,\end{cases}$$

只有零解，其中 a_{ij} 均为整数($i,j=1,2,3$).

【证】 将原方程组变形为：$\begin{cases}(a_{11}-\frac{1}{2})x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\frac{1}{2})x_2+a_{23}x_3=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\frac{1}{2})x_3=0.\end{cases}$

为证原方程组只有零解，只需证明齐次方程组的系数行列式 $D\neq 0$.

令 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix}$,

由于 a_{ij} 全为整数，故 $f(\lambda)$ 是 λ 的以整数为系数的三次多项式.

设 $f(\lambda)=-\lambda^3+b_1\lambda^2+b_2\lambda+b_3$，其中 b_1,b_2,b_3 均为整数，显然 $f\left(\frac{1}{2}\right)=D$.

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^3+b_1\left(\frac{1}{2}\right)^2+b_2\left(\frac{1}{2}\right)+b_3=\frac{1}{8}(-1+2b_1+4b_2+8b_3)$

$=\frac{1}{8}(-1+2m)$,

其中 m 为整数，由于 $2m-1\neq 0$，故 $f\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$，即 $D\neq 0$.

【例 4.13】 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，且 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,i=1,2,\cdots,n$，证明 $\boldsymbol{A}$ 的第一列代数余子式都相等，即有 $A_{1i}=A_{1j}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$.

【证】 因为 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0,i=1,2,\cdots,n$，故 $|\boldsymbol{A}|=0,r(\boldsymbol{A})<n$. 当 $r(\boldsymbol{A})<n-1$ 时，$\boldsymbol{A}^*=0$，结论显然成立. 当 $r(\boldsymbol{A})=n-1$ 时，$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=0$，$\boldsymbol{A}^*$ 的列向量是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，而 $\boldsymbol{\xi}=[1,1,\cdots,1]$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，且是基础解系，故存在常数 k，使得 $[A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}]=k[1,1,\cdots,1]$，故 $\boldsymbol{A}$ 的第一列的代数余子式全相等.

【例 4.14】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，证明：$r(\boldsymbol{A}^n)=r(\boldsymbol{A}^{n+1})$.

【证明】 先证方程组 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.

若 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因此 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解必为 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；

反之，当 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，如果 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，设 $k_0,k_1,\cdots,k_n$ 使 $k_0\boldsymbol{x}+k_1\boldsymbol{Ax}+\cdots+k_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，依次用 $\boldsymbol{A}^n,\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A}$ 乘该式，即得 $k_0=k_1=\cdots=k_n=0$，故这 $(n+1)$ 个向量线性无关，这不可能，所以 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，于是可知 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，故 $r(\boldsymbol{A}^n)=r(\boldsymbol{A}^{n-1})$.

【例 4.15】* 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_3+x_5=0,\\ x_2-x_4=0,\\ x_1-x_2+x_5=0,\\ x_1-x_4+x_5=0,\end{cases}$ 的解空间的一组标准正交基.

【解】 对该方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&0&-1&0\\1&-1&0&0&1\\1&0&0&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&0&-1&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

于是化为同解的阶梯形方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_4+x_5=0,\\x_2-x_4=0,\\x_3-x_4=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x_1=x_4-x_5,\\x_2=x_4,\\x_3=x_4.\end{cases}$$

因 $r(A)=3$,故解空间的维数为 $5-3=2$,即基础解系含2个线性无关向量,由上式易得齐次线性方程组的一个基础解系.

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

最后,将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化,取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=(-1,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{4}(1,1,1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1\right)^{\mathrm{T}},$$

故 $\boldsymbol{\eta}_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\left(\dfrac{-3}{2\sqrt{7}},\dfrac{1}{2\sqrt{7}},\dfrac{1}{2\sqrt{7}},\dfrac{1}{2\sqrt{7}},\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)^{\mathrm{T}}$

即为所求的一个标准正交基.

第五章　矩阵的特征值与特征向量

特征值与特征向量的重要性质

(1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ 的特征根,则

1°　$\lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$,

2°　$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\boldsymbol{A}|$.

(2) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的互不相等的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 所对应的特征向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关.

(3) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量 $\boldsymbol{x}$,一定是非零向量,且对于任意非零常数 $k \neq 0$, $k\boldsymbol{x}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量.

(4) λ_1, λ_2 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是它们对应的特征向量,则 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(5) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 所对应的属于 λ 的特征向量,则当 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 \neq \boldsymbol{0}$ 时, $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量.

(6) 设 λ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, k, a, b 均为常数, m 为正整数,则

1°　$k\boldsymbol{A}, a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ ($\boldsymbol{A}$ 可逆) 的特征值分别为 $k\lambda, a\lambda + b, \lambda^m, \dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$.

2°　设 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{x}$ 是 $k\boldsymbol{A}, a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^m, \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^*$ 所对应的特征值为 $k\lambda, a\lambda + b, \lambda^m, \dfrac{1}{\lambda}, \dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 的特征向量.

重要定理

定理 1　属于方阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量线性无关.

定理 2　属于实对称矩阵的不同特征值的特征向量正交.

定理 3　相似矩阵具有相同的特征多项式,因而具有相同的特征值(特征向量不一定相同).

定理 4　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似(即 $\boldsymbol{A}$ 可对角化)的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量.

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix},\text{其中 } \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \text{ 为 } \boldsymbol{A} \text{ 的 } n \text{ 个特征值.}$$

定理 5　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵,则必有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

定理 6　n 阶方阵与对角矩阵相似的充要条件是对于每个 k_i 重特征值 λ_i,特征矩阵 $(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$ 的秩为 $n - k_i$.

即　　秩 $(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = n - k_i$.

题型 I　有关特征值与特征向量概念及性质的命题

【例 5.1】　填空题

(1) 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $1,-2,-3$，则 $|\boldsymbol{A}|=$________；$\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值________；$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值________；$3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 x 和 y 应满足的条件________.

(3) $\boldsymbol{x}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 对应于特征值 λ 的特征向量________.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，满足条件 $|8\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0,\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{E},|\boldsymbol{A}|<0$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值________.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，满足 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$，则 $|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$________.

【解】　(1) 由特征值的性质：$|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=1\times(-2)\times(-3)=6$. $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为 $1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}$，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $6,-3,-2$. $3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $3\lambda^2+2\lambda+1$：$6,9,22$.

(2) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\x&1-\lambda&y\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$. 显然要使 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量必须 $\lambda=1$ 有两个线性无关的特征向量，即 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$.

因为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\x&0&y\\1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&0&1\\x&0&y\\0&0&0\end{bmatrix}$，所以 $\begin{vmatrix}-1&1\\x&y\end{vmatrix}=0\Rightarrow x+y=0$.

(3) 由题设 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{APP}^{-1}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，两边左乘以 $\boldsymbol{P}^{-1}$，于是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x})$，故 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 对应于 λ 的特征向量为 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$.

(4) 由 $|8\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}-(-8\boldsymbol{E})|=0\Rightarrow\lambda=-8$.

又 $|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|2\boldsymbol{E}|\Rightarrow|\boldsymbol{A}|^2=16\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=\pm4$，因为 $|\boldsymbol{A}|<0$.

所以 $|\boldsymbol{A}|=-4$，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$（$\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值）$=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{1}{2}$.

(5) 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{Ax}=\lambda(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda^2\boldsymbol{x}$，

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}\Rightarrow\lambda^2\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\Rightarrow(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，所以，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或 1.

(6) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=|3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征值 $1,-2,\dfrac{2}{3}$.

则 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值 $2\lambda+1:3,-3,\frac{7}{3}$.

故　$|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=3\times(-3)\times\frac{7}{3}=-21$.

【例 5.2】　单项选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，λ_1,λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$，则下列结论正确的是

(A) $\lambda_1=\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 的分量成比例.

(B) $\lambda_1=0$，则 $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$.

(C) $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(D) $\lambda_1\neq\lambda_2$，若 $\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2$ 也是特征值，则对应特征向量是 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$.

【　】

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，其特征值分别为 $\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=1$，其对应特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$，记 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2]$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为

(A) $\begin{bmatrix}3&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&2\end{bmatrix}$.

【　】

(3) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化的充要条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不全相同的特征值.

(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有 n 个全不相同的特征值.

(C) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不相同的特征向量.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值的重数与其线性无关特征向量的个数相同.　【　】

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 与矩阵【　】相似.

(A) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

【　】

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则

(A) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$.　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵.　(D) 对任意常数 t，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似.

【　】

【解】　(1) 当 $\lambda_1=\lambda_2$，即有重根时，方阵可能只有一个线性无关的特征向量，也可能有多于一个的线性无关的特征向量，因此(A) 不入选，(B) 显然不入选，因为特征向量为非零向量.

因为 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda_3(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\lambda_3\boldsymbol{x}_1+\lambda_3\boldsymbol{x}_2$，

又　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2$，

所以 $\lambda_3\boldsymbol{x}_1+\lambda_3\boldsymbol{x}_2=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2\Rightarrow(\lambda_3-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1+(\lambda_3-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$.

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，所以 $\lambda_3 - \lambda_1, \lambda_3 - \lambda_2$ 不全为"0"，于是 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 线性相关，与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，$\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 线性无关矛盾，因此(D) 不入选，故(C) 入选. 实际上，也可以直接由特征值与特征向量的重要性质(4) 中得出该选(C).

(2) 由特征值与特征向量的对应关系，立即可知该选(D).

(3) (A)，(C) 不是充分条件，(B) 充分而非必要. 故(D) 入选.

(4) 设(A)，(B)，(C)，(D) 中的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$.

(A)$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$，因而 $k_1 = k_2 = 2, k_3 = 1$，$r(\lambda_1 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) =$

$r(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = r\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq n - k_1 = 3 - 2 = 1$，由定理 6，可知(A) 不入选.

(B) 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$，因而 $k_1 = k_2 = 2, k_3 = 1$，

$$r(\lambda_1 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}) = r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 = n - k_1 = 3 - 2 = 1,$$

$$r(\lambda_2 \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}) = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 = n - k_3 = 3 - 1 = 2,$$

故由定理 6，可知(B) 入选.

(5) (A)$\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 不定有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，所以(A) 不入选.

(B)$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ 只能得出 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征值相同，得不出 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量相等，故(B) 不入选.

(C) 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不一定与对角矩阵相似，所以(C) 不入选. 由排除法可知(D) 入选.

也可直接推导出(D)，因为 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，所以 $\exists$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$，于是，

$\boldsymbol{P}^{-1}(t\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}(t\boldsymbol{E})\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = t\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}$，　故 $t\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} \sim t\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}$，可知(D) 入选.

题型 Ⅱ　特征值的求法与证法

【解题提示】　(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为具体矩阵(即 $\boldsymbol{A}$ 的各元素具体给出的矩阵)，一般利用特征方程：$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ 进行分析.

(2) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为抽象矩阵，则利用矩阵的特征值，特征向量的定义：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ 进行分析.

(3) 求解特征方程 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ 的根的方法：

① 赋值法(即给定 $\lambda = k$，若 $f(k) = 0$，则 $\lambda = k$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值).

② 降幂法(即利用行列式的性质使 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}|$ 的某行(或列) 有 λ 的一次因式，则 $f(\lambda) = (\lambda - k) f_1(\lambda)$，$f_1(\lambda)$ 是关于 λ 的 $n-1$ 次多项式).

【例 5.3】　求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】　$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{(2)+(3)}$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{(2)-(3)}$$

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2(2-\lambda) \Rightarrow \text{特征值}\ \lambda_1 = \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2.$$

(ⅰ) 属于 $\lambda = 4$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对应的齐线性方程组 $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(ⅱ) 属于 $\lambda = 2$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，对应的齐线性方程组 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

【例 5.4】 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 2$. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

【解】 令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$，设 λ 为 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为对应的特征向量，即 $\boldsymbol{Bx} = \lambda\boldsymbol{x}$，于是有　$\boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{x} = (1+\lambda)\boldsymbol{x}$，

由定义，可知 $1+\lambda$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda+1$ 的特征向量，由此可知求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的问题转化为求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}(a_1, a_2, a_3)$，因为 $r(\boldsymbol{B}) = 1$，所以 $\boldsymbol{B}$ 的二阶子式全为 0.

于是，由特征多项式的展开式，有

$|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{E}| = -\lambda^3 + (a_1^2 + a_2^2 + a_2^2)\lambda^2 = -\lambda^3 + 2\lambda^2$，

故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$.

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1,1,3.

(ⅰ) $\boldsymbol{B}$ 属于 $\lambda = 0$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{因为 } r(\boldsymbol{B}) = 1} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对应的齐线性方程组为 $a_1x_1=-a_2x_2-a_3x_3$，所以 $\xi_1=\begin{bmatrix}-a_2\\a_1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}-a_3\\0\\a_1\end{bmatrix}$.

ξ_1,ξ_2 也是 A 关于 1,1 的特征向量.

(ⅱ) B 属于 $\lambda=2$ 的特征向量

由 $B\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}=2\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$，

$\xi_3=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ 就是 B 的属于 $\lambda=2$ 的特征向量，即 A 的属于 $\lambda=3$ 的特征向量.

【例 5.5】　设 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，其中 E 为单位矩阵，试求 $2A^{-1}+3E$ 的特征值.

【解】　因为 A 为抽象矩阵，所以由定义法求解特征值，设 λ 为 A 的特征值，对应特征向量设为 $x\neq 0$，则 $Ax=\lambda x$.

$(A^2-3A+2E)x=A^2x-3Ax+2x=\lambda^2x-3\lambda x+2x=(\lambda^2-3\lambda+2)x=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2.$

所以，A 的特征值为 1 或 2. 即，$2A^{-1}+3E$ 的特征值为 5 或 4.

【例 5.6】　设 A 为 n 阶实矩阵，$AA^{\mathrm{T}}=E$，$|A|<0$，试求 $(A^{-1})^*$ 的一个特征值.

【解】　因为 $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$，所以先求 $A^*=\dfrac{|A|}{\lambda}$（λ 为 A 的特征值）.

由 $AA^{\mathrm{T}}=E$，有 $A+E=A+AA^{\mathrm{T}}=A(E+A^{\mathrm{T}})=A(A+E)^{\mathrm{T}}\Rightarrow|A+E|=|A(A+E)^{\mathrm{T}}|=|A||A+E|\xrightarrow[|A|=\pm1,\text{又}|A|<0,\text{所以}|A|=-1]{|AA^{\mathrm{T}}|=|E|}-|A+E|\Rightarrow$

$|A+E|=0\Rightarrow\lambda=-1.$

于是 A^* 的一个特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}=\dfrac{-1}{-1}=1$，

故 $(A^{-1})^*$ 的特征值为 1.

【例 5.7】　设 n 阶方阵 A 的每行元素之和为 $a(a\neq0)$，且 $|A|=2a$，试求 $(A^*)^*+2A^*-4E$ 的一个特征值.

【解】　因为 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A\xrightarrow{\text{因为}|A|=2a}(2a)^{n-2}A$，$A^*=|A|A^{-1}=2aA^{-1}$，

又 $\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a-\lambda & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}$

$=(a-\lambda)\begin{vmatrix}1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 1 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow\lambda=a$ 为 A 的一个特征值.

又对应于 A 的一个特征值 a，A^{-1} 的一个特征值为 $\frac{1}{a}$.

故 $(A^*)^*+2A^*-4E$ 的一个特征值为　$(2a)^{n-2}\cdot a+2\times 2a\times\frac{1}{a}-4=2^{n-2}a^{n-1}$.

【例 5.8】 设 n 阶可逆矩阵 A 的特征值为 n 个非零数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，试证：伴随矩阵 A^* 的特征值为 $\lambda_i^{-1}|A|\ (i=1,2,\cdots,n)$.

【证】 设 λ_i 为 A 的一个特征值，其对应的特征向量为 α_i，

于是，$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，两边左乘 A^*，利用 $A^*A=|A|E$，

则得 $A^*A\alpha_i=\lambda_iA^*\alpha_i\Rightarrow|A|\alpha_i=\lambda_iA^*\alpha_i\Rightarrow A^*\alpha_i=\frac{|A|}{\lambda_i}\alpha_i$

由定义可知 $\lambda_i^{-1}|A|\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 A^* 的特征值.

题型 Ⅲ　矩阵 $kE-A$ 是否可逆的特征值证法

【解题提示】 *若 k 为 A 的特征值，则 $|kE-A|=0$，因之 $kE-A$ 不可逆；若 k 不是 A 的特征值，则 $|kE-A|\neq 0$，因之 $(kE-A)$ 可逆. 当告知 A 为正交矩阵时，为证 $kE-A$ 的可逆性，常将 E 写成 $E=A^TA$ 或 $E=AA^T$.*

【例 5.9】 证明如下结论：

(1)A 为 n 阶正交矩阵，$|A|<0$，证明：$E+A$ 不可逆；

(2)A 为 $(2n+1)$ 阶正交矩阵，$|A|>0$，证明：$E-A$ 不可逆.

【证】 (1) 因为 $A^TA=AA^T=E$，$|AA^T|=|E|\Rightarrow|A|^2=1\xrightarrow{|A|<0}|A|=-1$，

又 $|E+A|=|A^TA+A|=|A^T+E||A|=|(A+E)^T||A|$

$=-|E+A|\Rightarrow 2|E+A|=0\Rightarrow|E+A|=0$，

所以 $E+A$ 不可逆.

(2) $|E-A|=|AA^T-A|=|A||A^T-E|\xrightarrow[\Rightarrow|A|=1]{\text{由}|AA^T|=|E|,\ |A|>0}|(A-E)^T|$

$=|A-E|=|(-1)(E-A)|=(-1)^{2n+1}|E-A|=-|E-A|$，

$\Rightarrow 2|E-A|=0$. 即 $|E-A|=0$，故 $E-A$ 不可逆.

【例 5.10】 设 A 为 n 阶实反对称矩阵，试证：

(1)$E+A,E-A$ 均可逆；

(2)$(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵，且 -1 不是其特征值.

【证】 (1) 只需证 A 的特征值 $|\lambda|\neq 1$，即可.

设 x 为 A 对应于 λ 的特征向量，则 $Ax=\lambda x$，由 $A=-A^T$ 且 $A=\overline{A}$，于是

$$x^TA^T=\lambda x^T\Rightarrow\begin{cases}-x^TA=\lambda x^T,\\ \overline{x^T}\,\overline{A^T}=\overline{\lambda}\,\overline{x^T}\Rightarrow\overline{x^T}(-\overline{A})=\overline{\lambda}\,\overline{x^T}\Rightarrow\overline{x^T}A=-\overline{\lambda}\,\overline{x^T}\Rightarrow\overline{x^T}Ax=-\overline{\lambda}\,\overline{x^T}x,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\overline{x^T}\lambda x=-\overline{\lambda}\,\overline{x^T}x\Rightarrow(\lambda+\overline{\lambda})\,\overline{x^T}\cdot x=0.$$

因为 $x\neq 0$，$\overline{x^T}x\neq 0$，所以 $\lambda+\overline{\lambda}=0$，即 $\lambda=0$ 或 λ 为纯虚数，

于是 $|\lambda|=1$ 不是 A 的特征值，故 $E+A,E-A$ 均可逆.

(2) 欲证 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵，只需证

$[(E-A)(E+A)^{-1}][(E-A)(E+A)^{-1}]^T=E$ 即可.

因为 $(E-A)(E+A)^{-1}\cdot[(E-A)(E+A)^{-1}]^T$

$= (E-A)(E+A)^{-1}[(E+A)^{-1}]^T \cdot (E-A)^T$

$= (E-A)[(E+A)^T(E+A)^{-1}](E-A)^T$

$\xlongequal{\text{又} A=-A^T} (E-A)[(E-A)(E+A)]^{-1} \cdot (E+A)$

$\xlongequal[=(E+A)(E-A)\text{可交换性}]{\text{又由于}(E-A)(E+A)} (E-A)[(E+A)(E-A)]^{-1}(E+A)$

$= (E-A)(E-A)^{-1}(E+A)^{-1}(E+A) = E,$

故 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 是正交矩阵.

欲证 -1 不是 $(E-A)(E+A)^{-1}$ 的特征值,只需证 $|-E-(E-A)(E+A)^{-1}| \neq 0$,即可.

因为 $|-E-(E-A)(E+A)^{-1}| = (-1)^n |(E+A)(E+A)^{-1}+(E-A)(E+A)^{-1}| = (-1)^n |(E+A)+(E-A)||(E+A)^{-1}| = (-1)^n \cdot |2E||E+A|^{-1} \neq 0.$

【例 5.11】 设 A 为 n 阶方阵,证明:矩阵 $A+\varepsilon E$ 和 $\gamma A+E$ 除有限个 ε,γ 值外,均为满秩矩阵.

【证】 欲证除有限个 ε 值外,$A+\varepsilon E$ 均为满秩矩阵,只需证 ε 只有有限个值满足 $|A+\varepsilon E|=0$.

若 $|A+\varepsilon E| = |\varepsilon E-(-A)| = 0$,则 ε 为 $-A$ 的特征值,因为 n 阶方阵 $-A$ 至多有 n 个不同的特征值,故除去 ε 为 $-A$ 的特征值外,$A+\varepsilon E$ 均为满秩矩阵.

现证 $\gamma A+E$ 除有限个 γ 值外,均为满秩矩阵.

(ⅰ) 若 $\gamma=0$,则 $\gamma A+E=E$,显然 $\gamma A+E$ 为满秩矩阵.

(ⅱ) 若 $\gamma\neq 0$,则 $\gamma A+E=\gamma\left(A+\frac{1}{\gamma}E\right)$,令 $\frac{1}{\gamma}=\varepsilon$.则 $|\gamma A+E| = \gamma^n |A+\varepsilon E|$,

由已证可知,除去 $\frac{1}{\gamma}$ 取 $(-A)$ 的非零特征值外,$\gamma A+E$ 均为满秩矩阵.

【例 5.12】 设 A,B 均为 n 阶方阵,$\varphi(\lambda)$ 是 B 的特征多项式,证明 $\varphi(A)$ 满秩的充要条件是 A 和 B 没有公共的特征值.

【证】 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 B 的特征值,则

$$\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$

于是 $\varphi(A) = (A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)\cdots(A-\lambda_n E)$,

$\varphi(A)$ 满秩 $\Leftrightarrow |\varphi(A)| \neq 0$,

$\Leftrightarrow |A-\lambda_i E| \neq 0,(i=1,2,\cdots,n) \Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不是 A 的特征值.

故 $\varphi(A)$ 满秩 $\Leftrightarrow$ 是 A 和 B 没有公共的特征值.

题型 Ⅳ　两矩阵相似的证法

【解题提示】 (1) 与对角矩阵相似的证法:① 定义法.即证明 ∃ 可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值;② 证明方阵 A 有 n 个线性无关的特征向量.

(2) 证明 A 不与对角矩阵相似的证法:① 用反证法;② 证明方阵 A 没有 n 个线性无关的特征向量,或证对于 A 的某个 k_i 重特征值 λ_i,秩 $r(\lambda_i E-A) \neq n-k_i$.

(3) 与非对角矩阵 B 相似的证法:① 定义法,即证明存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=B$;② 等价法,即 $A \sim \Lambda_1 \sim \Lambda_2 \sim B \Rightarrow A \sim B$,其中 Λ_1 与 Λ_2 的对角元素相同,仅排列次序不同.

【例 5.13】 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，证明：$\boldsymbol{A}^*$（$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵）也可对角化.

【证】 因为 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，所以存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n), \qquad ①$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，所以 $\lambda_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

① 式的两边取逆，得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}\right), \qquad ②$$

② 式的两边同乘以 $|\boldsymbol{A}|$，得

$$\boldsymbol{P}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1},\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_n}\right),$$

即 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left(\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_1},\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_2},\cdots,\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_n}\right)$，

故 $\boldsymbol{A}^*$ 可对角化.

【例 5.14】 证明以下结论：

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶实矩阵，$|\boldsymbol{A}|<0$. 则 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$，$ad-bc=1$，$|a+d|>2$，证明：$\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

【证】（1）令 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$，则

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+\begin{vmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & -a_{22}\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+|\boldsymbol{A}|.$$

设 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值为 λ_1,λ_2，由二次方程根与系数关系有 $\lambda_1\lambda_2=|\boldsymbol{A}|<0$，可知 λ_1 与 λ_2 异号，故 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

（2）令 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$，则

$f(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+1$，

因为 $|a+d|>2$，所以 $\Delta=b^2-4ac=(a+d)^2-4\cdot 1\cdot 1>0$，

故 $\boldsymbol{A}$ 有两个不相等的非零实特征值，因而 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似.

【例 5.15】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$（$m$ 为正整数）. 证明：$\boldsymbol{A}$ 不与对角矩阵相似.

【证】 用反证法. 若不然 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似，则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

于是 $\underbrace{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}_{m个}$

$=\underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\cdot\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\cdots\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}_{m个}$，

$\Rightarrow\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1^m,\lambda_2^m,\cdots,\lambda_n^m)$，

由题设 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}\Rightarrow\lambda_1^m=\lambda_2^m=\cdots=\lambda_n^m=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 矛盾，命题得证.

【例 5.16】 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，证明：$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

【证】 由定义法证，因为 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，所以可取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$.

于是 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{BA}$，

故 $AB \sim BA$.

【例 5.17】 设 A 为 n 阶可逆矩阵，$A \sim B$，则 $A^* \sim B^*$.

【证】 因为 $A \sim B$，所以 ∃ 可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = B \Rightarrow |P^{-1}AP| = |B| \Rightarrow |A| = |B|$，

因为 A 可逆，所以 $|A| \neq 0$，于是 $|B| \neq 0$ 可知 B 可逆，又由 $P^{-1}AP = B$，有

$(P^{-1}AP)^{-1} = B^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P = B^{-1}$，

两边同乘以 $|A|$，注意到 $A^* = |A|A^{-1}, B^* = |B|B^{-1}$，有

$$P^{-1}|A|A^{-1}P = |A|B^{-1} \xlongequal{\text{因为}|A|=|B|} |B|B^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^*P = B^*\text{，故 } A^* \sim B^*.$$

题型 V $P^{-1}AP = \Lambda$ 中已知两者求第三者的方法

(1) 已知 A 的全部特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 及其对应的 n 个特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，求 A.

【解题提示】 解法：令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，则

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \Rightarrow A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)P^{-1},$$

即
$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]^{-1}.$$

注 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$ 的次序与 $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 的次序要一致.

【例 5.18】 设 3 阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i (i = 1,2,3)$，其列向量 $\alpha_1 = (1,2,2)^T, \alpha_2 = (2,-2,1)^T, \alpha_3 = (-2,-1,2)^T$，求矩阵 A.

【解】 由 $A\alpha_i = i\alpha$，可知 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

$$\text{令 } P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix}1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix},$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 6\end{bmatrix}.$$

【例 5.19】 设 3 阶方阵 A 的三个特征值为 1,1,2，对应的特征向量为 $\alpha_1 = (1,2,1)^T, \alpha_2 = (1,1,0)^T, \alpha_3 = (2,0,-1)^T$，问 A 是否与对角形矩阵 Λ 相似?若相似，求出 Λ.

【解题提示】 判别 n 阶方阵 A 是否与对角矩阵相似的程序：① 判别方阵 A 是否有 n 个不相等的特征值，有，则 $A \sim \Lambda$；没有则进一步判别. ② 设方阵 A 的特征值 λ_i 的重数为 k_i，若 $r(\lambda_i E - A) = n - k_i$，则 $A \sim \Lambda$，否则 A 不与 Λ 相似.

【解】 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ 矩阵 A 有三个线性无关的特征向量 $\Rightarrow A$ 与一个对角矩阵 Λ 相似.

取 $P=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&3&-4\\1&-1&1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&0\\&1&\\0&&2\end{bmatrix}$，

故 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&3&-4\\1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&2\\0&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$.

【例 5.20】 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 6,3,3，与特征值 6 对应的特征向量为 $\alpha_1=(1,1,1)^T$，求 A.

【解】 设与 α_1 正交的特征向量为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 $x_1+x_2+x_3=0\Rightarrow x_1=-x_2-x_3$，

取 $\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$，令 $P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{bmatrix}$，$P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$，

故 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&&0\\&3&\\0&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$.

(2) 在 $P^{-1}AP=\Lambda$ 中，已知 A 及 Λ，求 P 的方法.

【解题提示】 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 Λ 中对角线上的元素，求出 A 属于 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的特征向量 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，则以 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为列向量的矩阵 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 即为所求. 若要求的是正交矩阵 P，则将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 正交化，单位化后得 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，则以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为列向量的矩阵 $P=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]$，即为所求正交矩阵.

【例 5.21】 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$.

(1) 已知 A 的一个特征值为 3，试求 y；

(2) 求矩阵 P，使 $P^{-1}A^2P$ 为对角矩阵.

【解】 (1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\-1&\lambda&0&0\\0&0&\lambda-y&-1\\0&0&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(y+2)\lambda+2y-1]=0$,

将 $\lambda=3$ 代入上式，解出 $y=2$.

(2) $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{bmatrix}$.

(ⅰ) A^2 的属于 $\mu_1=1$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-4&-4\\0&0&-4&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$，对应的齐线性方程组 $x_3=-x_4$，

特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$.

(ⅱ) A^2 的属于 $\mu_2=3^2=9$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}8&0&0&0\\0&8&0&0\\0&0&4&-4\\0&0&-4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$，对应的齐线性方程组为 $\begin{cases}x_1=0,\\x_2=0,\\x_3=x_4,\end{cases}$ $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$.

所求 P 为 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$.

【例 5.22】　设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 是 n 个实数，方阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&-a_3&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}$$

(1) 若 λ 是 A 的特征值，试证：$\boldsymbol{\alpha}=[1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1}]^{\mathrm T}$ 是对应于 λ 的特征向量.

(2) 若 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两互异，求矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【解】　(1) 矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$，因为 λ 为 A 的特征值，所以 $f(\lambda)=0$，于是

$\lambda^n=-(a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)$，

$$A\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&-a_3&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\lambda\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda\\\lambda^2\\\vdots\\\lambda^{n-1}\\-a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)\end{bmatrix}=(\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1},\lambda^n)^{\mathrm T}=\lambda\boldsymbol{\alpha},$$

可知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 A 的属于 λ 的特征向量.

(2) 因为 λ_i 互异，所以对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，作 $P=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，即为所求(易证 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$).

第六章 二次型

重要定义、性质及定理

定义 1　二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵.

定义 2　两个 n 阶实对称方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$. 若存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是合同矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$.

定义 3　若对任何非零向量 $\boldsymbol{x}$，实二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 恒有

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,$$

则称二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型，$\boldsymbol{A}$ 称为正定矩阵.

重要性质

(1) 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $k\boldsymbol{A}(k>0)$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^{*}$ 也正定.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，且 $r(\boldsymbol{A})=n<m$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也正定.

重要定理

定理 1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，则必有正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是以 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为对角元素的对角矩阵.

定理 2　任给二次型 $f(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,(a_{ij}=a_{ji})$，总存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使 f 化为标准型

$$f=\lambda_1{y_1}^2+\lambda_2{y_2}^2+\cdots+\lambda_n{y_n}^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

定理 3　实二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于“0”

$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式大于“0”

即　$a_{11}>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}>0.$

题型 Ⅰ　有关概念及性质的命题

【例 6.1】 填空题

(1) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2tx_2x_3$ 的秩为 2，则 $t=$________.

(2) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&2&0\\0&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

则二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=$________. 其 $r(\boldsymbol{A})=$________.

(3) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$ 是正定的，则 t

为________.

(4) 设实对称 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ 合同于对角矩阵，即存在可逆矩阵 C，使 $C^{T}AC = \Lambda$，则 $C =$ ________.

(5) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2$，则其正惯性指数________，负惯性指数________，符号差________.

(6) 设 n 阶实对阵 A 的特征值分别为 $1,2,\cdots,n$，则当 $t =$ ________ 时，$tE - A$ 为正定矩阵.

【解】 (1) f 的实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & t \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix}$，因为 $r(A) = 2$，

所以 $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & t \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} = -4t = 0 \Rightarrow t = 0$.

(2) 注意 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 不是二次型的矩阵，因为它为非实对称矩阵，用矩阵乘法可得

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + 4x_2x_3$$

$$= (x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

故 $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. 因为 $|A| = -4\frac{1}{4}$，所以 $r(A) = 3$.

(3) 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，因为 A 为正定.

所以 $\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2t^2 > 0$,

解得 $\begin{cases} t^2 < 4 \\ t^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow t^2 < 2 \Rightarrow -\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$.

(4)**【解题提示】** 有两种解法：1° 配方法；2° 正交变换法（解题程序：① 求出 A 的特征值和对应的特征向量. ② 将所求得的线性无关特征向量正交化、单位化. ③ 以所得的正交单位化向量为列，即得所要求的正交变换矩阵 T）.

【解】 用配方法:$\boldsymbol{A}$ 所对应的二次型为

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$$
$$=(x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2)-4x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$$
$$=(x_1+2x_2)^2-(2x_2-x_3)^2.$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2\\y_2=2x_2-x_3\\y_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3,\\x_2=\dfrac{1}{2}(y_2+y_3),\\x_3=y_3,\end{cases}$ 即 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$,

亦即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$. 其中 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}$ 即为所求.

(5) 通过非退化线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_3,\\x_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}y_2,\end{cases}$ f 化为:$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

可知正惯性指数为 2,负惯性指数为 1,符号差 1.

(6) 显然当 $t>n$ 时,$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的特征值均为正数,故 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

【例 6.2】 单项选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,则与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 【 】

(2) n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充分必要条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 的所有 k 阶子式为 $\boldsymbol{E}(k=1,2,\cdots,n)$. (B) $r(\boldsymbol{A})=n$.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值非负. (D) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为正定. 【 】

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶正定矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 是

(A) 实对称矩阵. (B) 正定阵.

(C) 可逆矩阵. (D) 正交矩阵. 【 】

(4) 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+6x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3=C$,则此二次曲面是

(A) $C=0$ 为锥面. (B) $C<0$ 为柱面.

(C) $C>0$ 为椭球面. (D) $C=1$ 单叶双曲面.

【 】

【解】 (1)【解题提示】两个 n 阶实对称矩阵合同,当且仅当它们有相同的秩及正惯性指数.

由此可知(B)入选.

(2) (A) 为充分而非必要条件，(B)，(C) 是必要而非充分，故(D) 入选.

(3) 由于矩阵相乘一般不可交换，所以(A) 不入选. (B) 也不成立，事实上 $\begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$ 均正定，但 $\begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ 为非正定矩阵，一般讲，正定矩阵的乘积不一定正定. (D) 也不成立，因为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 不一定是正交矩阵，故其乘积一定非正交，由排除法可知(C) 入选. 事实上，因为 $|\boldsymbol{A}|>0$，$|\boldsymbol{B}|>0$，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|>0$，故 $\boldsymbol{AB}$ 可逆.

(4) $$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2)+(x_1^2-2x_1x_3+x_3^2)+2x_2^2\\&=(x_1-2x_2)^2+(x_1-x_3)^2+2x_2^2,\end{aligned}$$

通过非退化线性变换 $\begin{cases}y_1=x_1-2x_2\\y_2=x_1-x_3\\y_3=\sqrt{2}x_2\end{cases}$，$f$ 化为 $f=y_1^2+y_2^2+y_3^2=C$.

可见(C) 入选.

题型 Ⅱ　将二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\\vdots & & \vdots\\a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 化为标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y^2+\cdots+\lambda_ny^2$ 的方法

【解题提示】　化二次型为标准形的方法：

1° 配方法. ① 若二次型含有 x_i 的平方项，则先把 x_i 乘积项集中，然后配方，再对其余的变量进行类似处理，直到都配成平方项为止，经过非退化线性变换，即得标准形. ② 若二次型不含平方项，但 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$，则先作可逆的线性变换 $\begin{cases}x_i=y_i+y_j\\x_j=y_i-y_j\\x_k=y_k\end{cases}(k=1,2,\cdots,n,\text{且}k\neq i,j)$，化二次型为含平方项的二次型，再按 ① 方法配方.

2° 正交变换法. 解题程序：① 将给定的二次型写成矩阵形式 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 其中 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵；② 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值及对应的特征向量；③ 把重根所对应的线性无关的特征向量组正交化，然后再将全部特征向量单位化，并将它们作为 $\boldsymbol{Q}$ 的列向量；④ 写出二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的标准形 $f(\boldsymbol{x})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，并写出正交变换：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$.

【例 6.3】　用配方法化二次型为标准形，并写出变换矩阵.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$.

【解】　(1) 先将含 x_1 的项归并在一起，然后配方

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-x_3^2-2x_2x_3+2x_2^2+5x_3^2+6x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2.\end{aligned}$$

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2 - 2y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$

于是　$f = y_1^2 + y_2^2$，所用变换矩阵 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}(|\boldsymbol{C}| = 1 \neq 0)$ 可逆.

(2) f 中不含平方项

令 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$　代入 $f(x_1, x_2, x_3)$ 中，得

$$\begin{aligned} f &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 8y_1y_3 - 4y_2y_3 = 2(y_1^2 + 4y_1y_3 + 4y_3^2) - 8y_3^2 - 2y_2^2 - 4y_2y_3 \\ &= 2(y_1 + 2y_3)^2 - 2(y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2) - 6y_3^2 \\ &= 2(y_1 + 2y_3)^2 - 2(y_2 + y_3)^2 - 6y_3^2. \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + 2y_3 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_3, \\ y_2 = z_2 - z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$

于是　$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 6z_3^2$，所用变换矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, (|\boldsymbol{C}| = -2 \neq 0).$$

【例 6.4】　用正交变换化下列二次型为标准形，并写出正交变换矩阵.

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$；

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

【解】　(1) $f = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$,

$\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$.

(ⅰ) 属于 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

对应的齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 \end{cases}$，$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，单位化 $\begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$

（ⅱ）属于 $\lambda_2=4$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&2&0\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

对应的齐线性方程组 $\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=-2x_3\end{cases}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$，单位化 $\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

（ⅲ）属于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}-4&2&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2&1&0\\2&-3&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

对应的齐线性方程组 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_3\\x_2=x_3\end{cases}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$，单位化 $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

$f=y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$，　所作的正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

(2) $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，

特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$，$\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2=2$，

$\lambda_3=-7$.

（ⅰ）属于 $\lambda=2$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$ 对应的齐线性方程组　$x_1=-2x_2+2x_3$，

特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_1]}{[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_1]}\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+\dfrac{4}{5}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5}\\1\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$,

单位化 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$,单位化 $\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{\sqrt5}{3}\\\frac{4}{3\sqrt5}\end{bmatrix}$.

(ⅱ)属于 $\lambda=-7$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-4&1&-1\\2&-5&-4\\0&-9&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&1\\2&-5&-4\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&1\\2&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

对应的齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\1\end{bmatrix}$,单位化 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

$f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$,　所作的正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{2}{3\sqrt5}&-\frac{1}{3}\\0&\frac{\sqrt5}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

题型Ⅲ　二次型与其标准形中参数的确定及正交变换

【解题提示】 解法:根据二次型与其标准形所对应的矩阵是相似矩阵,而相似矩阵具有相同的特征多项式、特征值等性质来确定其中的参数值.

【例 6.5】 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\alpha x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f=5y_1^2+\beta y_2^2-4y_3^2$,试求参数 α,β 及所用正交变换矩阵.

【解】 二次型及其对应的标准形的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&\alpha&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5&&\\&\beta&\\&&-4\end{bmatrix}.$$

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0\Rightarrow(1-\lambda)^2(\alpha-\lambda)-16(\alpha-\lambda)-8(1-\lambda)-32=0,\qquad(*)$$

由对角矩阵的对角元素与原方阵特征值的关系可知，$\lambda=5$，$\lambda=-4$ 均为方程（$*$）的解，将 $\lambda=-4$ 代入（$*$）中得

$25(\alpha+4)-16(\alpha+4)-72=0\Rightarrow\alpha=4.$

又　$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$，即　$5+\beta-4=1+\alpha+1\xlongequal{\alpha=4}6$，

故　$\beta=5$，于是

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{bmatrix}.$$

（ⅰ）A 的属于 $\lambda=5$ 的特征向量

$$(\lambda E-A)=(5E-A)=\begin{bmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

对应的齐次线性方程组 $x_1=-\frac{1}{2}x_2-x_3$，$\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-4\\1\end{bmatrix}$，

ξ_1,ξ_2 正交，将其单位化分别为 $\eta_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$，$\eta_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3\sqrt{2}}\\-\frac{4}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

（ⅱ）A 的属于 $\lambda=-4$ 的特征向量

$$(\lambda E-A)=(-4E-A)=\begin{bmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-5&2&4\\1&-4&1\\4&2&-5\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&-4&1\\4&2&-5\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},$$

单位化为 $\eta_3=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

所作正交变换矩阵 $Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\\0&-\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$.

【例 6.6】　设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2\alpha x_2x_3$ 通过正交变换化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2+\beta y_3^2$，求常数 α,β 及所用正交变换矩阵 Q，若 $x^Tx=3$，求 f 的最大值.

【解】　二次型及其对应标准形的矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&\alpha\\-1&\alpha&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&\beta\end{bmatrix}.$$

$$|A-\lambda E|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-1&1-\lambda&\alpha\\-1&\alpha&1-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{令}\lambda=2}\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&\alpha\\-1&\alpha&-1\end{vmatrix}=0,$$

$\Rightarrow\alpha^2+2\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=-1.$

又 $A\sim B$，于是 $2+2+\beta=a_{11}+a_{22}+a_{33}=3\Rightarrow\beta=-1$，

可知 A 的特征值为 $2,2,-1$.

(i) A 的属于 $\lambda=2$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},x_1=-x_2-x_3,\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

单位化分别为 $\eta_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$.

(ii) A 的属于 $\lambda=-1$ 的特征向量

$$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases},\xi_3=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix},$$

单位化为 $\eta_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$，所用正交变换矩阵 $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$.

因为正交变换不改变线段长度，所以　$y^Ty=3$.

$f=2y_1^2+2y_2^2-y_3^2\leqslant2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\leqslant6$，

故 f 在 $x^Tx=3$ 条件下的最大值是 6.

【例 6.7】　已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3(a>0)$ 通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

【解】　二次型 f 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix}$，

特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-a\\0&-a&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$,

由二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的标准形可知,$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$,将 $\lambda=1$ 代入特征方程得 $a^2=4\Rightarrow a=\pm2$,因 $a>0$,所以 $a=2$,于是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$.

(ⅰ)属于 $\boldsymbol{A}$ 的 $\lambda=1$ 的特征向量

$\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,对应的齐次方程组 $\begin{cases}x_1=0,\\x_2=-x_3,\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$,单位化,$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

(ⅱ)属于 $\boldsymbol{A}$ 的 $\lambda=2$ 的特征向量

$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,对应的齐次方程组 $\begin{cases}x_2=-2x_3\\x_3=0\end{cases}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

(ⅲ)属于 $\boldsymbol{A}$ 的 $\lambda=5$ 的特征向量

$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$,对应的齐次方程组 $\begin{cases}x_1=0,\\x_2=x_3,\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$,单位化 $\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$,所用正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$.

【例 6.8】 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+\alpha x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1) 求参数 α 及此二次型对应矩阵的特征值;

(2) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

【解】 (1) 二次型对应矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&\alpha\end{bmatrix}$,由 $r(\boldsymbol{A})=2\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=24\alpha-72=0$, $\alpha=3$.

$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(4-\lambda)(\lambda-9)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$,

故 $f=4y_2^2+9y_3^2$,

(2) 当 $f = 4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$ 时，f 表示椭圆柱面.

题型Ⅳ　有关正定矩阵命题的证明

【解题提示】　常用方法有：

(1) 过渡法. 所谓过渡法就是假设存在正交矩阵 Q，使

$$Q^{T}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n)$$

其中 λ_i 为 A 的特征值，于是把对矩阵 A 的研究转化为对对角矩阵的研究.

(2) 二次型法. 将对矩阵 A 的正定性的研究转化为对二次型 $x^{T}Ax$ 的正定性的研究.

【例 6.9】　试证实对称矩阵 A 为正定矩阵的充要条件是 A 的所有特征值均为正数.

【证】　因为 A 为实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q，使

$$Q^{T}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}，其中 \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n 为 A 的特征值.$$

由于合同变换不改变矩阵的正定性可知：

A 为正定矩阵 $\Leftrightarrow \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为正数.

【例 6.10】　设 A 是 n 阶实对称矩阵，则当 t 充分大时，$A + tE$ 为正定矩阵.

【证】　设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（$\lambda_i$ 均为实数），取 $t > \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\lambda_i|\}$，则 $A + tE$ 的特征值 $\lambda_i + t (i = 1,2,\cdots,n)$ 全大于 0，故 $A + tE$ 为正定矩阵.

【例 6.11】　设 A, B 均为实对称矩阵，A 正定，则必存在满秩矩阵 P，使 A, B 同时化为对角矩阵

$$P^{T}AP = E, P^{T}BP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

【证】　因为 A 为正定矩阵，所以存在满秩矩阵 P_1，使 $P_1{}^{T}AP = E$.

$P_1^{T}BP_1 = C$，因为 $(P_1^{T}BP_1)^{T} = C^{T} \Rightarrow P_1^{T}B^{T}P_1 \xlongequal{因为 B^{T} = B} P_1^{T}BP_1 = C$，

即 $C = C^{T}$，所以 C 仍为实对称矩阵，于是 $\exists$ 正交矩阵 Q，使 $Q^{T}CQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

取 $P = P_1Q$，于是 $P^{T}AP = E$，且 $P^{T}BP = Q^{T}P_1^{T}BP_1Q = Q^{T}(P_1^{T}BP_1)Q =$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}，P 为所求矩阵.$$

【例 6.12】 证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定的充要条件是存在满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

【证】 "⇒"

因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，所以存在满秩矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，于是，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}^{-1}=(\boldsymbol{Q}^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{-1})$，取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

"⇐"

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}\Rightarrow(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}^{-1})=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 正定.

【例 6.13】 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，求积分 $\int_0^{+\infty}f(x_1,,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}t$，

并证明：当 $a_{ij}=\dfrac{1}{i+j}$ 时，实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定；$\boldsymbol{B}=\left(\dfrac{a_{ij}}{i+j}\right)_{n\times n}$ 正定.

【解】 $\int_0^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(x_1\mathrm{e}^{-t},x_2\mathrm{e}^{-2t},\cdots,x_n\mathrm{e}^{-nt})\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\mathrm{e}^{-jt}\mathrm{e}^{-it}\Big)\mathrm{d}t=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(i+j)t}\mathrm{d}t$$

$$=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\,\frac{1}{i+j}\mathrm{e}^{-(i+j)t}\Big|_0^{+\infty}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{i+j}x_ix_j.$$

$$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\overset{\text{因为}a_{ij}=\frac{1}{i+j}}{=}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j}=\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\mathrm{e}^{-it}\mathrm{e}^{-jt}\Big)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\mathrm{e}^{-kt}\Big)^2\mathrm{d}t\Big(\text{因为}\sum_{i,j=1}^{n}y_iy_j=\Big(\sum_{k=1}^{n}y_k\Big)^2\Big).$$

因为对任一 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq0$，均有 $\int_0^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\mathrm{e}^{-kt}\Big)^2\mathrm{d}t>0$，

所以 $f=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{1}{i+j}x_ix_j>0$，即 f 正定，故 $\boldsymbol{A}$ 正定.

以下证 $\boldsymbol{B}$ 正定.

令 $g=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{a_{ij}}{i+j}x_ix_j=\int_0^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\mathrm{e}^{-it}\mathrm{e}^{-jt}\Big)\mathrm{d}t$，

由 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定，所以对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，

有 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_i\mathrm{e}^{-it})(x_j\mathrm{e}^{-jt})>0$，

故 $g=\int_0^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\mathrm{e}^{-it}\mathrm{e}^{-jt}\Big)\mathrm{d}t>0$，

即 $g=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 正定. 于是 $\boldsymbol{B}=\left[\dfrac{a_{ij}}{i+j}\right]_{n\times n}$ 正定.

第三篇* 概率论与数理统计初步

第一章 事件的概率

题型Ⅰ 利用古典概型与加法定理计算概率

【解题提示】 (1) 利用古典概型：$P(A)=\dfrac{\text{有利 }A\text{ 的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$，求解概率时，要注意各事件是否为等可能事件，否则会出错. (2) 属于“至少存在一个”的命题，用对立事件求解简便. (3)“任取 k 件”与“无放回地逐件抽取 k 件”，虽然考虑问题的角度不同，但二者所计算出的概率却是相同的. (4) 在用古典概率计算公式求概率时，可在不同的样本空间考虑，这样同一道题就可以有多种解法. 但在计算基本事件总数与计算有利 A 事件的基本事件个数时必须在同一确定的样本空间中考虑问题，如果一个考虑到顺序，比如用排列作，则另一个也得考虑顺序，也用排列作，千万不能不统一.

【例 1.1】 填空题

(1) n 个朋友随机地围绕圆桌就座，则其中有两个人一定要坐在一起(即座位相邻)的概率______.

(2) 将编号为 1,2,3 的三本书随意地排列在书架上，则至少有一本书自左到右的排列顺序号与它的编号相同的概率______.

【解】 (1) 设要挨在一起坐的是张三和李四，先让张三坐好，则李四共有 $n-1$ 个座位可坐，这 $n-1$ 个位子是等可能的，而有利场合有两种(李四坐在张三的左边或右边)，故所求概率为 $\dfrac{2}{n-1}$.

(2) 设 A_i——“第 i 本书恰排在第 i 个位置上”，$i=1,2,3$. B——“至少有一本书的排序号与它上的编号相同”. 显然，$B=A_1\cup A_2\cup A_3$.

基本事件总数 $P_3^3=3!$，对 A_1,A_2,A_3 有利的个数 $P_2^2=2!$，

所以 $P(A_i)=\dfrac{2!}{3!}=\dfrac{1}{3},i=1,2,3$；

对 A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3 有利的个数均为 1，所以

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_3)=P(A_2A_3)=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6};$$

对 $A_1A_2A_3$ 有利的个数为 1，所以

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{6};$$

故 $P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)=\dfrac{2}{3}$.

【例 1.2】 随机试验 E：掷两颗骰子，观察出现的点数所组成的数对 (x,y)，求：(1) 事件

A——“点数之和等于5”的概率；(2)B——“点数之和小于5”的概率.

【解】 样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),\cdots,(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}$ 基本事件总数为 $6\times6=36$. 且这36个数对是等可能的.

$A=\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\}$，有利于 A 的基本事件个数为4.

故 $P(A)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.

(2)$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$，有利于 B 的基本事件个数为6.

故 $P(B)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

【例1.3】 某教研室共有11名教师，其中男教师7人，现要选3个优秀教师，问3个教师中至少有1个女教师的概率.

【解】 设 A——“3名优秀教师中至少有1名女教师”，

A_i——“3名优秀教师中恰有 i 名女教师”，$i=1,2,3$，

则 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$，A_1,A_2,A_3 两两互斥，由加法公式有

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$=\frac{C_4^1C_7^2}{C_{11}^3}+\frac{C_4^2C_7^1}{C_{11}^3}+\frac{C_4^3C_7^0}{C_{11}^3}\approx0.788.$$

【另解】 $P(A)=1-P(\overline{A})$，$\overline{A}$——“3个优秀教师全是男的”，

于是 $$P(A)=1-\frac{C_7^3}{C_{11}^3}\approx0.788.$$

题型Ⅱ 利用条件概率与乘法公式计算概率

【解题提示】 解这类型关键是弄清楚用 $P(B\mid A)$ 还是 $P(AB)$. 可从如下两个方面去分辨：

(1) 从样本空间讲，计算 $P(AB)$ 的样本空间为 Ω；计算 $P(B\mid A)$ 的样本空间为 Ω_A.

(2) 凡涉及事件 A 与 B“同时”发生的用 $P(AB)$；凡有“包含”关系、“先后”关系、“主次”关系的用 $P(B\mid A)$.

注 解题前设好事件. 运用好独立性解题技巧. 记住如下公式：

(1)$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$，

当 A,B,C 互斥时，$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

当 A,B,C 互相独立时，(独立不一定互斥)

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$，

(2)$P(ABCD)=P(D\mid ABC)P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A)$.

当 A,B,C,D 互相独立时，$P(ABCD)=P(A)P(B)P(C)P(D)$.

【例1.4】 设某人打电话，忘记了对方电话号码的最后1个数码，因而对最后一个数码，就随机地拨，假设拨完某地区规定的电话位数算完成一次拨号，且假设对方电话不占线，求：(1) 到第 k 次才拨通对方电话的概率；(2) 不超过 k 次拨通对方电话

的概率.

【解】 (1) A_k——"第 k 次拨通电话",意味着第 $1,2,\cdots,k-1$ 次均未拨通,最后一次拨通. $k=1,2,\cdots,10$. 于是

$$P(A_1)=\frac{1}{10},$$

$$P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10},$$

$$\cdots$$

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})\cdots P(A_k\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}})$$

$$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{1}{10-k+1}=\frac{1}{10}.$$

(2) B_k——"不超过 k 次而拨通电话"即

$B_k=A_1\cup\overline{A_1}A_2\cup\cdots\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k$,而 $A_1,\overline{A_1}A_2,\cdots,\overline{A_1}\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k$ 互斥,

故 $P(B_k)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+\cdots+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10}=\frac{k}{10}.$$

【例 1.5】 袋中有10个球,8红2白,现从袋中任取两次,每次取一球作不放回抽样,求下列事件的概率:(1) 两次都是红球;(2) 两次中一次取红球,另一次取白球;(3) 至少有一次取得白球;(4) 第二次取得白球.

【解】 A_i——"第 i 次取出的是红球",$\overline{A_i}$——"第 i 次取出的是白球",$i=1,2$.

(1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$;

(2) $P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)$

$$=P(A_1)P(\overline{A_2}\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})$$

$$=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{16}{45};$$

(3) $P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})=1-P(\overline{\overline{A_1}\cup\overline{A_2}})=1-P(A_1A_2)=1-\frac{28}{45}=\frac{17}{45}$;

(4) $P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$

$$=P(A_1)P(\overline{A_2}\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})$$

$$=\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{5}.$$

【例 1.6】 设袋中装有 a 只红球,b 只白球,每次自袋中任取一只球,观察颜色后放回,并同时再放入 m 只与所取出的那只同色的球. 连续在袋中取球四次,试求第一、二次取到红球且第三次取白球、第四次取红球的概率.

【解】 $A_i(i=1,2,3,4)$——"第 i 次取到红球",$\overline{A_i}$——"第 i 次取到白球",所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)=P(A_4\mid A_1A_2\overline{A_3})P(\overline{A_3}\mid A_1A_2)P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$

$$=\frac{a+2m}{a+b+3m}\cdot\frac{b}{a+b+2m}\cdot\frac{a+m}{a+b+m}\cdot\frac{a}{a+b}.$$

【例 1.7】 为防止意外事故，在矿井内同时安装两种警报系统 A 与 B，每种系统单独使用时，其有效率 A 为 0.92，B 为 0.93，在 A 失灵条件下 B 有效概率为 0.85. 求：(1) 发生事故时，这两种警报系统至少有一个有效的概率；(2) 在 B 失灵条件下，A 有效的概率.

【解】 A——“警报系统 A 有效”，$\overline{A}$——“警报系统 A 失效”，

B——“警报系统 B 有效”，$\overline{B}$——“警报系统 B 失效”.

$P(A)=0.92, P(B)=0.93, P(B\mid\overline{A})=0.85$,

$$(1)P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})$$

$$=1-[1-P(A)][1-P(B\mid\overline{A})]=1-0.08\times0.15=0.988;$$

$$(2)P(A\mid\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(\overline{A}\cup B)}{P(\overline{B})}=\frac{1-[P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)]}{P(\overline{B})}$$

$$=\frac{1-P(B)-P(\overline{A})+P(\overline{A}B)}{P(\overline{B})}$$

$$=1-\frac{P(\overline{A})-P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})}{P(\overline{B})}=1-\frac{0.08(0-0.85)}{0.07}$$

$$=0.829.$$

【例 1.8】 设一个工人看管三台机床，在 1 小时内机床需要工人照管的概率：第一、二、三台分别是 0.9，0.8，0.7. 求在 1 小时内：(1) 没有一台机床需要看管的概率；(2) 至少有一台机床不需要看管的概率；(3) 至多只有一台机床需要看管的概率.

【解】 设 A,B,C 分别表示“第一、二、三台机床需要看管”，显然三台机床需不需要看管是相互独立的. 因此

$$(1)\ P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]$$

$$=(1-0.9)(1-0.8)(1-0.7)=0.006;$$

$$(2)P(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{ABC})=1-P(ABC)=1-P(A)P(B)P(C)=0.496;$$

(3) D——“至多只有一台需要看管”，

$$P(D)=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)$$

$$=0.006+0.9\times0.2\times0.3+0.1\times0.8\times0.3+0.1\times0.2\times0.7=0.098.$$

【例 1.9】 假设某校学生四级英语考试的及格率为 98%，其中 70% 的学生通过六级英语考试，试求从该校随机地选出一名学生通过六级英语考试的概率.

【分析】 该题是属两事件乘积的概率. 从样本空间考虑它是“全校学生”中随机地抽出一名. 另一方面从字里行间分析具有“同时”的含义，即通过四级且通过六级.

【解】 设 A——“通过四级英语考试” B——“通过六级英语考试”，

$P(A)=98\%,\quad P(B\mid A)=70\%$,

$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=0.98\times0.70=0.686.$

【例 1.10】 设某试验分两阶段进行，已知通过第一阶段试验的概率为 60%，通过第二阶段试验的概率为 40%. 问通过第一阶段试验再通过第二阶段试验的概率是多少？

【分析】 只有通过第一阶段试验才可进行通过第二阶段试验. 很显然这是属条件概率问题.

【解】 A——“通过第一阶段试验”， B——“通过第二阶段试验”.

$P(A)=0.60,\quad P(B)=0.40$,

因为 $A \supset B$ 所以 $AB = B$.

故 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{0.40}{0.60} = \dfrac{2}{3}$.

【例 1.11】 某人有两盒火柴,吸烟时从任一盒中取一根火柴,经过若干时间后,发现一盒火柴已用完.如果最初两盒中各有 n 根火柴,求这时另一盒中还有 r 根火柴的概率.

【解】 不妨设甲盒已空而乙盒还有 r 根火柴,因为是随机抽取,可知这时必已取过 $2n-r$ 次,每次取甲、乙盒的概率均为 $\frac{1}{2}$,而在 $2n-r$ 次中必定是 n 次取了甲盒的,$n-r$ 次取了乙盒的,最后第 $2n-r+1$ 必定是取甲盒的,否则不知其为空盒.故概率为

$P_1 = \dfrac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-r} = \dfrac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-r}$,

同理,最后乙盒空而甲盒剩 r 的概率为

$P_2 = \dfrac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-r} = \dfrac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-r}$,

故所求概率为 $P = P_1 + P_2 = C_{2n-r}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-r} = \dfrac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$.

题型 Ⅲ　利用全概公式和逆概公式(贝叶斯公式)计算概率

【解题提示】 (1) 全概与逆概的区分:由因导果属于全概问题;由果索因属于逆概问题.

(2) 全概公式与概率加法公式的区分:由诸多事件引发某一事件,而这一事件又不能简单地看做这诸多事件的和(若这样理解的话,有些事件的概率就是多余的,或者按这样理解,计算出的概率超出[0,1]范围).这样的概率问题属于全概类型.

用全概公式解题的程序:

① 判断求解的问题是否为全概类型;

② 若是全概类型,正确假设欲求事件 A 及样本空间(或完备事件组 $\{B_i\}$);

③ 设 $\{B_i\}$ 为与欲求事件 A 有关联的完备事件组,计算出 $\{P(B_i)\}$,$\{P(A \mid B_i)\}$;

④ 将 ③ 的结果代入公式 $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$.

【例 1.12】 在记有 1,2,3,4,5 五个数字的五张卡片上,无放回地抽取两次,一次一张,求:(1) 已知第一次取到偶数卡,求第二次取到奇数卡的概率;(2) 在第二次才取到奇数卡的概率;(3) 第二次取到奇数卡的概率.

【解】 A——"第一次取到奇数卡", B——"第二次取到奇数卡"

(1) 这是 $\overline{A}$ 发生条件下 B 的概率　$P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{3}{4}$;

(2) "第二次才取到奇数卡" 意味着"第一次取到偶数卡",即第一次 $\overline{A}$ 发生,故"第二次才取到奇数卡" 为 $\overline{A}$ 与 B 同时发生的事件.于是

$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10}$;

(3) "第二次取到奇数卡" 是由"第一次取到奇数卡"与"第一次取到偶数卡"两事件引发的结果."第二次取到奇数卡" 显然不能看作这两者简单的和.因此是全概

类型.

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}.$$

【另解】 用传统"抓阄"的方法处理,即可得 $P(B)=\frac{3}{5}$.

【例 1.13】 某商店出售尚未过关的某电子产品,进货 10 件,其中有 3 件次品,已经售出 2 件,现要从剩下的 8 件产品中任取一件,问这件是正品的概率.

【解】 A——"剩下的 8 件产品中任取一件为正品",

B_i——"售出的 2 件中恰有 i 件正品",$i=0,1,2$.

$$P(B_0)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15},P(B_1)=2\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{15},P(B_2)=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{7}{15},$$

$$P(A\mid B_0)=\frac{7}{8},\quad P(A\mid B_1)=\frac{6}{8},P(A\mid B_2)=\frac{5}{8}.$$

由全概公式有

$$P(A)=\frac{1}{15}\times\frac{7}{8}+\frac{7}{15}\times\frac{6}{8}+\frac{7}{15}\times\frac{5}{8}=\frac{7}{10}.$$

【另解】 也可用"抓阄法"处理.

【例 1.14】 要验收一批(100 台)微机,验收方案如下:自该批微机中随机地取出 3 台进行测试(设 3 台微机的测试是相互独立的),如果 3 台中至少有一台在测试中被认为是次品,则这批微机就被拒绝接收.由于测试条件和水平,将次品的微机误认为正品的概率为 0.05,而将正品的微机误判为次品的概率为 0.01.如果已知这 100 台微机中恰有 4 台次品,试问这批微机被接收的概率是多少?

【解】 A——"这批微机被接收",

$B_i(i=0,1,2,3)$——"随机抽出的 3 台中恰有 i 台次品".

显然,B_0,B_1,B_2,B_3 是一个样本空间.

$$P(B_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3},\quad P(B_1)=\frac{C_4^1C_{96}^2}{C_{100}^3},\quad P(B_2)=\frac{C_4^2C_{96}^1}{C_{100}^3},\quad P(B_3)=\frac{C_4^3}{C_{100}^3},$$

$$P(A\mid B_0)=(0.99)^3,\quad P(A\mid B_1)=(0.99)^2\times 0.05,$$

$$P(A\mid B_2)=0.99\times(0.05)^2,\quad P(A\mid B_3)=(0.05)^3,$$

故 $$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(A\mid B_i)P(B_i)=0.8574+0.0055+0+0=0.8629.$$

【例 1.15】 在电源电压不超过 200V,在 200 ~ 240V 和超过 240V 三种情况下,某电子元件损坏的概率分别为 0.1,0.001,0.2.假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$,试求:(1) 该电子元件损坏的概率;(2) 该电子元件损坏时,电源电压在 200 ~ 240V 的概率.

【解】 设 A_1,A_2,A_3 分别表示电源电压"不超过 200V""在 200 ~ 240V""超过 240V"各事件,B 表示"电子元件损坏"事件.

由于 $X\sim N(220,25^2)$,所以

$$P(A_1)=P\{X\leqslant 200\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\leqslant\frac{200-220}{25}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-220}{25}\leqslant -0.8\right\}=\Phi(-0.8)=0.212.$$

$$P(A_2)=P\{220\leqslant X\leqslant 240\}=P\left\{\frac{200-220}{25}\leqslant\frac{X-200}{25}\leqslant\frac{240-200}{25}\right\}$$

$$=P\left\{-0.8\leqslant\frac{X-220}{25}\leqslant 0.8\right\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576.$$

$$P(A_3)=P\{X>240\}=1-P(A_1)-P(A_2)=1-0.212-0.576=0.212.$$

(1) 由题设可知　$P\{B\mid A_1\}=0.1, P\{B\mid A_2\}=0.001, P\{B\mid A_3\}=0.2.$

由全概公式　$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.0642.$

(2) 由贝叶斯公式 $P(A_2\mid B)=\dfrac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}\approx 0.009.$

【例 1.15】 有两批产品：第一批 20 件，有 5 件特级品；第二批 12 件，有 2 件特级品，今按两种方法抽样：

(1) 将两批产品混在一起，从中任取 2 件；

(2) 从第一批中任取 2 件混入第二批中，再从混合后的第二批中抽取 2 件，

试分别求出两种抽样情况下所抽两件均是特级品的概率.

【解】 (1) A——"混合后任取 2 件为特级品"，则 $P(A)=\dfrac{C_7^2}{C_{32}^2}=\dfrac{21}{496}.$

(2) D——"混合后任取 2 件为特级品"，

B_i——"从第一批抽出的 2 件中恰有 i 件特级品"，则

$$P(B_0)=\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{21}{38},\quad P(B_1)=\frac{15}{38},\quad P(B_2)=\frac{1}{19},$$

$$P(D\mid B_0)=\frac{1}{91},\quad P(D\mid B_1)=\frac{3}{91},\quad P(D\mid B_2)=\frac{6}{91},$$

故　$$P(D)=\frac{21}{38}\times\frac{1}{91}+\frac{15}{38}\times\frac{3}{91}+\frac{1}{19}\times\frac{6}{91}=\frac{3}{133}.$$

题型 Ⅳ　单项选择题

【解题提示】 解题方法：排除法（一个备选答案正确，其余三个必不正确；反之三个备选答案不正确，余下的一个必正确）. 分析过程中常用如下方法：

(1) 推演法（适用于备选答案为事件的概率以"数值"表示，或某种运算律；或题干给出的概率某种运算形式）；

(2) 图示法（适用于两个事件的概率）；

(3) 逆推法（从结论出发看推出的结果是否与题干或概率的性质矛盾）；

(4) 赋值法（适用于某范围内成立的题型）.

【例 1.16】 设 $B\subset A$，则下列正确的是　【　】

(A) $P(\overline{AB})=1-P(A)$.　　(B) $P(\overline{B}-\overline{A})=P(\overline{B})-P(\overline{A})$.

(C) $P(B\mid A)=P(B)$.　　(D) $P(A\mid\overline{B})=P(A)$.

【解】 因为 $B\subset A$　所以 $\overline{A}\subset\overline{B}$

故　$P(\overline{B}-\overline{A})=P(\overline{B})-P(\overline{A})$. 即选(B).

【例 1.17】 设事件 A 与 B 互斥，且 $0<P(B)<1$，则下列结论正确的是.　【　】

(A) $P(A\mid\overline{B})-P(B)P(A\mid\overline{B})=P(AB)$.

(B)$P(A \mid \overline{B}) + P(B)P(A \mid \overline{B}) = P(A)$.

(C)$P(A \mid \overline{B}) + P(B)P(A \mid \overline{B}) = P(\overline{A})$.

(D)$P(A \mid \overline{B}) - P(B)P(A \mid \overline{B}) = P(A)$.

【解】 因为 A 与 B 互斥,即 $AB = \varnothing$ 所以 $P(AB) = 0$,

又因为 $P(A) = P(A\overline{B} \cup AB) = P(A\overline{B}) + P(AB) = P(A\overline{B})$,

$$0 < P(B) < 1 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{B}) = 1 - P(B) > 0,$$

所以 $P(A) = P(\overline{B})P(A \mid \overline{B}) = [1 - P(B)]P(A \mid \overline{B})$,故 (D) 入选.

【例 1.18】 设 $P(A) > 0$,则下列结论正确的是. 【 】

(A)$P(B \mid A)P(A) \geqslant P(A) - P(B)$.

(B)$P(B \mid A)P(A) \geqslant P(A) + P(\overline{B})$.

(C)$P(B \mid A)P(A) \geqslant P(A) - P(\overline{B})$.

(D)$P(B \mid A)P(A) \geqslant P(A) + P(B)$.

【解】 因为 $P(B \mid A)P(A) = P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$,

又 $0 \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1$,

所以 $P(B \mid A)P(A) \geqslant P(A) + P(B) - 1 = P(A) - [1 - P(B)] = P(A) - P(\overline{B})$.

故(C) 入选.

第二章　随机变量及其分布

题型 Ⅰ　一维随机变量的分布函数及分布密度

【解题提示】 (1) 分布函数 $F(x)$ 中待定常数的确定是利用 $F(x)$ 的性质：

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}F(x)=1 \text{ 或 } F(x+0)=F(x)$$

(2) 分布密度 $\varphi(x)$（或离散型的分布律）中待定常数的确定是利用密度函数 $\varphi(x)$（或分布律）的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$（或 $\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=1$）.

(3) 求离散型随机变量分布律的程序：① 写出随机变量 X 的可能的取值；② 写出对应于各可能取值的事件的概率；③ 验证 $\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}\overset{?}{=}1$；(4) 利用公式 $F(x)=\sum_{x\leqslant x_k}P_k$.

注意正确划分 x 的取值区间并求出相应的概率（按累计法计算），其图形是右连续的阶梯形曲线.

(5) 连续型随机变量的分布函数、分布密度的求法：① 已知分布函数 $F(x)$，求分布密度，只要在相应区间内将 $F(x)$ 对 x 求导数即可，$F'(x)=\varphi(x)$，而端点处的值不必处理，最后将 $\varphi(x)$ 写成分段函数形式；② 已知分布密度 $\varphi(x)$，求分布函数 $F(x)$，只要在相应的区间内将 $F(x)$ 写成 $\varphi(x)$ 的变上限积分. $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\mathrm{d}t\quad(-\infty<x<b_i)$，最后将 $F(x)$ 写成分段函数形式.

【例 2.1】 填空题

(1) 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=a\dfrac{\lambda^k}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$，$\lambda>0$ 为常数，则常数 $a=$________.

(2) 设随机变量的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{a}{N}(k=1,\cdots,N)$，则常数 $a=$________.

【解】 (1) 由 $\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$，即 $\sum_{k=0}^{\infty}a\dfrac{\lambda^k}{k!}=a\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}\xrightarrow[\text{展开式}]{\text{由幂级数}}ae^{\lambda}=1\Rightarrow a=e^{-\lambda}$.

(2) 由 $\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=1$，即 $\sum_{k=1}^{N}\dfrac{a}{N}=\dfrac{a}{N}\sum_{k=1}^{N}1=\dfrac{a}{N}\cdot N=a=1\Rightarrow a=1$.

【例 2.2】 设随机变量的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}A\cos x, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}.$$

求：(1) 常数 A；(2) X 落在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 内的概率；(3) 分布函数 $F(x)$.

【解】 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}A\cos x\mathrm{d}x=2A\Rightarrow 2A=1\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$.

(2) $P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$

(3) $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$,

当 $x<-\frac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=0$；

当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x$
$=\frac{\sin x+1}{2}$；

当 $x\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}0\mathrm{d}x=1$；

故 $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\sin x+1}{2}, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2},\\ 1, & x\geqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

【例 2.3】 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ A+B\arcsin\frac{x}{a}, & -a\leqslant x<a,\quad (a>0)\\ 1, & x\geqslant a.\end{cases}$$

求：(1) A 和 B；(2) 概率密度 $f(x)$.

【解】 (1) 因为 X 为连续型随机变量，故分布函数 $F(x)$ 连续，于是 $F(-a-0)=F(-a)$，$F(a-0)=F(a)$.

即 $A-\frac{\pi}{2}B=0, A+\frac{\pi}{2}B=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{\pi}$.

(2) $$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【例 2.4】 设连续型随机变量 X 的分布密度为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则其分布函数 $F(x)$ 为. 【 】

(A) $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & 0<x\leqslant 1,\\ 2x-\frac{1}{2}x^2, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$(B)F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ -\frac{3}{2}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

$$(C)F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ -1+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$$(D)F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ -\frac{3}{2}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

【解】 当 $x\leqslant 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0$；

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2$；

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}(2-x)\mathrm{d}x$

$$=0+\frac{1}{2}+\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^x=-1+2x-\frac{x^2}{2};$$

当 $x>2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{x}0\mathrm{d}x=1.$

故应选(C).

【例 2.5】 如下四个函数，哪个是分布函数.　　【　】

$$(A)F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{3}{4}, & 1<x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

$$(B)F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \sin x, & 0\leqslant x<\frac{\pi}{4},\\ x, & \frac{\pi}{4}\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

$$(\text{C})F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{x^2}{2}, & 0<x\leqslant 1,\\ -\frac{3}{2}+2x-\frac{x^2}{2}, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

$$(\text{D})F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1+x}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

【解】 随机变量的分布函数必须满足条件:①$0\leqslant F(x)\leqslant 1$;②$F(+\infty)=1,F(-\infty)=0$;③ 若 $x_1<x_2$,则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$,且 $F(x+0)=F(x)$.

(A) 由于 $F(1+0)=\frac{3}{4}\neq F(1)=\frac{1}{2}$,所以(A) 不入选.

(B) 由于 $F\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$,所以(B) 不入选.

(C) 由于 $F(+\infty)\neq 1$,所以(C) 不入选.

故(D) 应入选.

【例 2.6】 一盒中有 5 个纪念章,编号为 1,2,3,4,5.在其中等可能地任取 3 个,用 X 表示取出的 3 个纪念章上的最大号码,求随机变量 X 的分布律,分布函数.

【解】 X 的可能取值:3,4,5

从 5 个纪念章中任取 3 个,有 $C_5^3=C_5^2=10$(种)取法,每种取法的概率均为$\frac{1}{10}$.

$X=3$,相当于取出号码为(1,2,3),所以 $P(X=3)=\frac{1}{10}$;

$X=4$,相当于取出号码为(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4),所以 $P(X=4)=\frac{3}{10}$;

$X=5$,相当于取出号码为(1,2,5),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)

所以 $P(X=5)=\frac{6}{10}$.

故 X 的分布律为

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$\text{分布函数 } F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ \frac{1}{10}, & 3\leqslant x<4,\\ \frac{2}{5}, & 4\leqslant x<5,\\ 1, & x\geqslant 5.\end{cases}$$

【例 2.7】 从一批有 10 个合格品与 3 个次品的产品中一件一件地抽取产品,各种产品被抽到的可能性相同,求在下列三种情形下,直到取出合格品为止所需抽取次数的

分布律.

(1) 每次取出的产品立即放回该批产品中混合后再取下一件产品；

(2) 每次取出的产品都不放回；

(3) 每次取出一件后总以一件合格品放回该批产品中.

【解】 设直到取出合格品所需抽取次数为 X.

(1) 该种情况，每次取得合格品的概率为$\frac{10}{13}$，次品的概率为$\frac{3}{13}$，故

$$P\{X=k\}=\left(\frac{3}{13}\right)^{k-1}\left(\frac{10}{13}\right),(k=1,2,3,\cdots).$$

(2) X 的可能取值为：1，2，3，4.

X	1	2	3	4
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{10}{12}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{10}{11}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{10}{10}$

(3) X 的可能取值为：1，2，3，4.

X	1	2	3	4
P	$\frac{10}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{11}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{12}{13}$	$\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{13}{13}$

【例 2.8】 设有 80 台同类型设备，各台工作相互独立，发生故障的概率都是 0.01，且一台设备的故障一个工人能排除. 考虑两种配备维修工人的方案：其一是由 4 人维护，每人承包 20 台；其二是由 3 个人共同维护 80 台，试比较两种方案的优劣.

【解】 在设备发生故障时不能及时维修的概率大的为劣，小的为优.

先分析第一种方案. 设 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示"第 i 人维护的20台设备中发生故障而不能及时维修"的事件，X 表示第一个人维护的 20 台中在同一时刻发生故障的台数，则 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\geqslant P(A_1)=P\{X\geqslant 2\}$.

因为 $X\sim B(20,0.01)$，$\lambda=nP=20\times 0.01=0.2$，

所以 $P\{X\geqslant 2\}\approx\sum\limits_{k=2}^{20}\frac{(0.2)^k e^{-0.2}}{k!}\approx 0.0175$.

故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率不小于 0.0175.

再分析第二种方案. 设 Y 表示 80 台中同一时刻发生故障的台数. $Y\sim B(80,0.01)$，$\lambda=nP=80\times 0.01=0.8$，故 80 台中发生故障而不能及时维修的概率为

$$P\{Y\geqslant 4\}\approx\sum_{k=4}^{80}\frac{(0.8)^k e^{-0.8}}{k!}\approx 0.0091.$$

可见，后一种方案优于前一种方案.

【例 2.9】 设随机变量 X 在(0,6)上服从均匀分布，求方程 $x^2+2Xx+5X-4=0$ 有实根的概率.

【解】 X 的分布密度 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}, & 0<x<6,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

方程有实根 $\Leftrightarrow \quad (2X)^2-4(5X-4)\geqslant 0\Rightarrow X\geqslant 4$ 或 $X\leqslant 1$.

因此,方程有实根的概率为

$$P(X>4 \text{ 或 } X<1)=P(X>4)+P(X<1)=\int_4^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^1\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_4^6\frac{1}{6}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{6}\mathrm{d}x=0.5.$$

【例 2.10】 使用了 t 小时的电子元件,在以后 Δt 小时内损坏的概率等于 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$,其中 λ 为不依赖于 t 的常数.假设在不相重叠的时间内,电子元件损坏与否是相互独立的,求电子元件在 T 小时内损坏的概率.

【解】 设 $P(t)$ 为电子元件在 t 小时内损坏的概率,

则 $P(t+\Delta t)=P($在 $t+\Delta t$ 内损坏$)=P($在 t 小时内损坏$)+P($在 t 小时内无损坏而在以后 Δt 小时内损坏$)=P(t)+[1-P(t)][\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)]$,

于是 $\dfrac{P(t+\Delta t)-P(t)}{\Delta t}=[1-P(t)]\left(\lambda+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right)$,

两边取 $\Delta t\to 0$ 的极限,得 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\lambda(1-P(t))$,又 $t=0$ 时,$P(t)=0$,

解微分方程,得 $\quad P(t)=1+C\mathrm{e}^{-\lambda t}$,代入 $P(0)=0 \Rightarrow C=-1$.

故 $\quad P(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t} \Rightarrow P(T)=1-\mathrm{e}^{-\lambda T}$.

题型 Ⅱ 二维随机变量(X,Y)的分布函数及其密度

【解题提示】 (1) 联合分布函数 $F(x,y)$ 中待定常数的确定是利用 $F(x,y)$ 的性质:

$$F(-\infty,-\infty)=0 \quad \text{或} \quad F(+\infty,+\infty)=1 \quad \text{以及}$$

$$F(x,y)=F(x+0,y),F(x,y)=F(x,y+0).$$

(2) 分布密度 $\varphi(x,y)$ 中待定常数的确定是利用密度函数 $\varphi(x,y)$ 的性质:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \text{ (联合分布律中的常数由} \sum_{i=1}\sum_{j=1}P_{ij}=1 \text{ 确定)}$$

(3) 联合分布密度 $\varphi(x,y)$ 是分段函数,则边缘密度 $\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$ 也是分段函数.边缘分布密度的求解程序:

① 先画出 $\varphi(x,y)$ 的非零区域 D;② 先确定出 $\varphi_X(x)$(或 $\varphi_Y(y)$)中 x(或 y)的区间(a,b)(或(c,d));③ 仿二重积分确定累次积分限的方法,定出 y(或 x)的上、下限后再求积分,即在(a,b)或(c,d)中任意找一点 x(或 y),是该点自下向上(或自左向右)画一条平行于 y(或 x)轴的直线与区域 D 相交,先交者为下限,后交者为上限.即

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\int_?^?\varphi(x)\mathrm{d}y,x\in(a,b),$$

$$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\int_?^?\varphi(x,y)\mathrm{d}x,y\in(c,d).$$

离散型二维随机变量(X,Y)边缘分布律的求法:

假设(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	…	y_n	…	(X 的边缘分布律) $P\{X=x_i\}=P_{i\cdot}$
x_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	…	P_{1n}	…	$\sum_j P_{1j}$
x_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	…	P_{2n}	…	$\sum_{j=1} P_{2j}$
x_3	…	…	…	…	…	…	…
⋮							
x_n	…	…	…	…	…	…	$\sum_{j=1} P_{nj}$
⋮							
$P\{Y=y_j\}=P_{\cdot j}$ (Y 的边缘分布律)	$\sum_{i=1} P_{i1}$	$\sum_{i=1} P_{i2}$	$\sum_{i=1} P_{i3}$	…	$\sum_{i=1} P_{in}$	…	

(4) 已知联合分布密度 $\varphi(x,y)$，计算二维随机变量概率的程序：

① 画出二重积分的积分域 D（由使联合密度 $\varphi(x,y)\neq 0$ 的区域与随机变量 X、Y 所满足的某种关系区域所构成的共同区域）；

② 将区域 D 上的二重积分化为累次积分，计算即得.

【例 2.11】 设随机变量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right).$$

试求：(1) 系数 A,B,C；　(2) (X,Y) 的概率密度；

(3) 边缘分布密度；　(4) $P\{0\leqslant X<2,Y<3\}$.

【解】 (1) $1=F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(C+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$0=F(-\infty,+\infty)=A\left(B-\dfrac{\pi}{2}\right)\left(C+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$0=F(+\infty,-\infty)=A\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(C-\dfrac{\pi}{2}\right)$,

稍一分析，即可得　$B-\dfrac{\pi}{2}=C-\dfrac{\pi}{2}=0 \Rightarrow B=C=\dfrac{\pi}{2}$,

代入(1)式可得　$A=\dfrac{1}{\pi^2}$，故 $F(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan\dfrac{y}{3}\right)$；

(2) $\varphi(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$；

(3) $\varphi_X(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi(4+x^2)}$,

$\varphi_Y(y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}\mathrm{d}x=\frac{3}{\pi(9+y^2)}$；

(4) $P\{0\leqslant X<2,Y<3\}=\displaystyle\int_0^2\int_{-\infty}^3\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{6}{\pi^2}\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}\int_{-\infty}^3\frac{\mathrm{d}y}{9+y^2}$

$=\dfrac{6}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}\Big|_0^2\cdot\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{y}{3}\Big|_{-\infty}^3=\dfrac{3}{16}$.

【例 2.12】 设 (X,Y) 在曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成的区域 D 中服从均匀分布，试求：

(1)(X,Y) 的联合密度；(2) 边缘密度 $\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$；(3)$P\{Y \geqslant X\}$.

【解】 (1) 如图 2.1,区域 D 的面积 $A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)_0^1=\frac{1}{3}$,

所以(X,Y) 的联合密度 $\varphi(x,y)=\begin{cases}3, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $\varphi_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\varphi(x,y)\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$=\begin{cases}3(\sqrt{x}-x^2), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

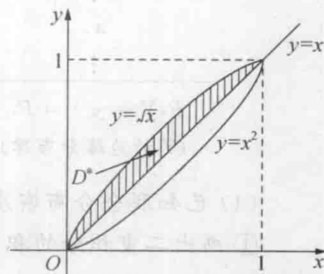


图 2.1

$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\varphi(x,y)\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}3\int_{y^2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$=\begin{cases}3(\sqrt{y}-y^2), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3)$P\{Y\geqslant X\}=\iint\limits_{D^*}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y=3\int_0^1(\sqrt{x}-x)\mathrm{d}x$

$=3\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

【例 2.13】 设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取值,另一随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值,试求:(1)(X,Y) 的分布律;(2) 边缘分布律.

【解】 (1) $\{X=i,Y=j\}$ 的取值情况是:$i=1,2,3,4$,j 是不大于 i 的正整数. 由概率的乘法公式有:

$P\{X=i,Y=j\}=P(X=i)P(Y=j\mid X=i)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{i}\quad(i=1,2,3,4,\quad j\leqslant i)$

于是 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

(2) 边缘分布律为

X	1	2	3	4
$P_{i\cdot}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

X	1	2	3	4
$P_{\cdot j}$	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{3}{48}$

【例 2.14】 一射手进行射击，击中目标的概率为 $p(0<p<1)$，射击直到击中目标两次为止. 设以 X 表示首次击中目标所进行的射击次数. 以 Y 表示总共进行的射击次数，试求 X 与 Y 的联合分布律及条件分布律.

【解】 (1) 由题意 $Y=n$ 表示第 n 次射击击中目标，且在前 $n-1$ 次射击中恰有一次击中目标. 已知各次射击是相互独立的，于是不管 $m(m<n)$ 是多少，其概率均为

$$P\{X=m,Y=n\}=p\cdot p\cdot \underbrace{q\cdot q\cdots q}_{n-2}=p^2q^{n-2}\quad (p+q=1).$$

其中，$n=2,3,\cdots,m=1,2,\cdots,n-1$. 这就是 X,Y 的联合分布律.

(2) $$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}=p^2\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-2}$$
$$=p^2\frac{q^{m-1}}{1-q}=pq^{m-1},m=1,2,\cdots,$$

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2}.$$

于是，条件分布律为

$$P\{X=m\mid Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P(Y=n)}=\frac{p^2q^{n-2}}{(n-1)p^2q^{n-2}}=\frac{1}{n-1},$$

$$P\{X=n\mid Y=m\}=\frac{P\{X=m,y=n\}}{P(X=m)}=\frac{p^2q^{n-2}}{pq^{m-1}}=pq^{n-m-1}.$$

【例 2.15】 设 X 在 $(0,1)$ 上随机取值，当观察到 $X=x(0<x<1)$ 时，Y 在 $(x,1)$ 上随机地取值，求 Y 的概率密度 $\varphi_Y(y)$.

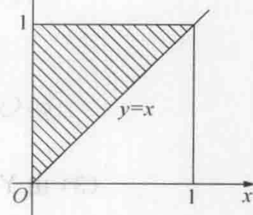


图 2.2

【解】 如图 2.2，根据边缘密度的定义，可知要先求联合密度 $\varphi(x,y)$. 又由题设

$$\varphi_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\varphi_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$，则 X,Y 的联合密度为

$$\varphi(x,y)=\varphi_X(x)\cdot\varphi_{Y|X}(y\mid x)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是 $$\varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^y\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

题型 Ⅲ 一维随机变量函数 $Y=g(X)$ 分布律(分布密度)的求法

【解题提示】(1) 方法 1° 利用定理求解.定理叙述如下:设 X 为连续型,其分布密度为 $\varphi_X(x)$, $-\infty<x<+\infty$,又函数 $g(x)$ 处处可导且 $g'(x)\neq 0$.则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量,其概率密度为

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\varphi_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha<y<\beta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $y=g(x)$ 的反函数, $\alpha=\min(g(-\infty),g(+\infty))$, $\beta=\max(g(-\infty),g(+\infty))$

(2) 方法 2° 先求出 y 的分布函数 $F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}$,再把 $F(y)$ 对 y 求导,即得 $\varphi_Y(y)=\dfrac{dF(y)}{dy}$.

【例 2.16】 设随机变量 X 的密度为 $\varphi_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x^3e^{-x^2}, & x\geqslant 0\end{cases}$,试求:

(1) $Y=2X+3$;(2) $Y=X^2$;(3) $Y=\ln X$ 的分布函数.

【解】 (1) 由 $Y=2X+3$,有 $y=2x+3$, $x=\dfrac{y-3}{2}$, $x'=\dfrac{1}{2}$,由定理即得

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}0, & y<3,\\ \left(\dfrac{y-3}{2}\right)^3e^{-\left(\frac{y-3}{2}\right)^2}, & y\geqslant 3.\end{cases}$$

(2) 由 $Y=X^2$,有 $y=x^2$ 非单调,于是用分布函数法.

$$F(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{y}<X\leqslant\sqrt{y}\}=\begin{cases}0, & y<0\\ \int_0^{\sqrt{y}}2x^3e^{-x^2}dx, & y\geqslant 0\end{cases}.$$

$$\varphi_Y(y)=\frac{dF(y)}{dy}=\begin{cases}0, & y<0\\ 2y^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-y}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0\\ ye^{-y}, & y\geqslant 0\end{cases}.$$

(3) 由 $Y=\ln X$,有 $y=\ln x$,单调, $x=e^y$, $x'=e^y$,由定理即得

$$\varphi_Y(y)=2(e^y)^3\cdot e^{-(e^y)^2}\cdot e^y=2e^{3y}e^{-e^{2y}}\ (-\infty,+\infty).$$

【例 2.17】 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

试求 $Y=X^2$ 的分布律.

【解】

P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$
X	-2	-1	0	1	3
X^2	4	1	0	1	9

故

X^2	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

注 随机变量的值相同时要合并，对应的概率为它们概率之和.

题型 Ⅳ　二维随机变量(X,Y)函数$g(X,Y)$的分布律(分布密度)的求法

【解题提示】 对二维随机变量(X,Y)函数主要掌握三种情况：①$Z=X\pm Y$；②$Z=\begin{cases}XY\\ \sqrt{X^2+Y^2}\\ \frac{X}{Y}\end{cases}$；③$\begin{cases}Z=\max\{X,Y\}\\ Z_*=\min\{X,Y\}\end{cases}$分布律或分布密度的求法即可.

(1) 已知X,Y的分布律(或分布密度)，求$Z=X\pm Y$的分布律(或分布密度)的程序：

① 先求出X,Y的联合分布律(或联合密度$\varphi(x,y)$)；

② 将(X,Y)中的X与Y相加减得出$X\pm Y$的值及该值对应的(X,Y)的概率.于是，即可得出$X\pm Y$的分布律(联合分布密度通常是先求分布函数$F_Z(z)=\iint\limits_{x\pm y\leqslant z}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，再将$F_Z(z)$对$z$求导，即得$\varphi_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$).

(2) 已知X,Y的分布律(或分布密度)，求$Z=\begin{cases}XY\\ \sqrt{X^2+Y^2}\\ \frac{X}{Y}\end{cases}$的分布律(或分布密度)的程序：

① 由$\varphi_X(x),\varphi_Y(y)$求出$(X,Y)$的分布律(或分布密度)；

② 再将X与Y作乘积(或$\sqrt{X^2+Y^2}$，或$\frac{X}{Y}$)，并求出相应的概率，即得Z的分布律(联合分布密度通常是先求分布函数$F_Z(z)$.在求解过程中用到二重积分化为累次积分的知识).

注 二重积分域是由$\varphi(x,y)\neq 0$的区域与曲线$z=xy$(或$z=\sqrt{x^2+y^2}$，或$z=\frac{x}{y}$)所围平面区域.由$\varphi_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$，即可求出$Z$的分布密度.

(3) $\begin{cases}Z=\max\{X,Y\}\\ Z_*=\min\{X,Y\}\end{cases}$，当$X$与$Y$互相独立时，其分布函数分别为

$$\begin{cases}F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)\\ F_{Z_*}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].\end{cases}$$

再由公式$\varphi_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$，即可求得联合分布密度.

【例 2.18】 设(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

试求：(1)$Z=X+Y$；(2)$Z=XY$；(3)$Z=X/Y$；(4)$Z=\max(X,Y)$的分布律.

【解】 与一维离散型随机变量函数的分布律的计算类似，本质上是利用事件及其概率的运算法则. 注意，Z的相同值的概率要合并.

概率	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,2)$	$(2,-1)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$X+Y$	-2	0	1	1	3	4
XY	1	-1	-2	-2	2	4
X/Y	1	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	2	1
$\max(X,Y)$	-1	1	2	2	2	2

于是 (1)

$X+Y$	-2	0	1	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(2)

XY	-2	-1	1	2	4
P	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(3)

X/Y	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	1	2
P	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

(4)

$\max(X,Y)$	-1	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

【例 2.19】 设(X,Y)的概率密度为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2(1-x),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

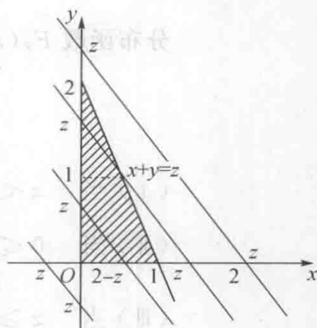


图 2.3

【解】 先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$，再求 $\varphi_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$.

（ⅰ）当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=0$；

（ⅱ）当 $0\leqslant z<1$ 时（见图 2.3），

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_D\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}1\cdot\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^z(z-x)\mathrm{d}x$$

$$=z^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^z=\frac{1}{2}z^2;$$

（ⅲ）当 $1\leqslant z<2$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^{2-z}\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{d}y+\int_{2-z}^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y$$

$$=z(2-z)-\frac{1}{2}(2-z)^2+(z-1)^2$$

$$=-\frac{1}{2}z^2+2z-1;$$

（ⅳ）当 $z\geqslant 2$ 时，$\iint\limits_D\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2(1-x)}\mathrm{d}y=1$.

综上所述

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}z^2, & 0\leqslant z<1,\\ z(2-z)-\dfrac{1}{2}(2-z)^2+(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

故 $\varphi_Z(z)=\begin{cases}z, & 0\leqslant z<1,\\ 2-z, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

【例 2.20】 设 X 与 Y 相互独立，且都服从 $(0,a)$ 上的均匀分布，试求 $Z=X/Y$ 的分布密度与分布函数.

【解】 如图 2.4 由题意 $\varphi_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<x<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$\varphi_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<y<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以 $\varphi(x,y)\xlongequal[\text{互相独立}]{\text{由于 }X\text{ 与 }Y}\varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y)$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}, & 0<x<a,0<y<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分布函数 $F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\left(\dfrac{X}{Y}\leqslant z\right)$

$$=\iint\limits_{\frac{x}{y}\leqslant z}\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

（ⅰ）当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

（ⅱ）当 $0\leqslant z<1$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{a^2}\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^{yz}\mathrm{d}x=\dfrac{z}{2}$；

（ⅲ）当 $z\geqslant 1$ 时，$F_Z(z)=\dfrac{1}{a^2}\int_0^a \mathrm{d}x\int_{x/z}^a \mathrm{d}y=1-\dfrac{1}{2z}$.

图 2.4(a)

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{z}{2}, & 0\leqslant z<1,\\ 1-\dfrac{1}{2z}, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

于是 $\varphi_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant z<1,\\ \dfrac{1}{2z^2}. & z\geqslant 1.\end{cases}$

图 2.4(b)

第三章　随机变量的数字特征

题型 I　一维随机变量的数字特征

【解题提示】 (1) 记住如下几种分布的数字特征.

分布	分布律或概率密度	数学期望 $E(X)$	方差 $D(X)$
(0－1) 分布	$P(X=k)=p^k q^{1-k}, k=0,1$ $0<p<1, p+q=1$	$E(X)=p$	$D(X)=pq$
二项分布	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$ $0<p<1, p+q=1$	$E(X)=np$	$D(X)=npq$
泊松分布	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\cdots,\lambda>0$	$E(X)=\lambda$	$D(X)=\lambda$
均匀分布	$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$E(X)=\frac{a+b}{2}$	$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}, \lambda>0$ 为参数	$E(X)=\frac{1}{\lambda}$	$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

(2) 解题程序:

① 由题意正确写出随机变量 X 的分布律或分布密度(有时不易写出分布密度,先写出分布函数);② 利用离散型或连续型的计算公式 $E(X)$ 或 $D(X)$ 计算期望或方差.

离散型:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

$$E(X)=\sum_{k}^{\infty}x_k p_k \qquad D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$$

连续型:设 $\varphi(x)$ 为 X 的分布密度,则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x \qquad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2\varphi(x)\mathrm{d}x$$

注 计算 $D(X)$ 常用重要公式:$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

【例 3.1】 设某厂生产的某种产品不合格率为 10%,假设生产一件不合格品,要亏损 2 元,每生产一件合格品,则获利 10 元,求每件产品的平均利润.

【解】 X 表示每件产品的利润,则 X 的可能取值为 $-2,10$,每件产品的平均利润,即 X 的数学期望,于是 $E(X)=-2\times0.1+10\times0.9=8.8$.

【例 3.2】 把 4 个球随机地投入 4 个盒子中,设 X 表示空盒子的个数,求 $E(X),D(X)$.

【解】 X 可能的取值为 0,1,2,3,对应的概率为

$$P(X=0)=\frac{4!}{4^4}=\frac{6}{64},P(X=1)=\frac{4C_3^1C_4^2C_2^1}{4^4}=\frac{36}{64},$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2(2C_4^3+C_4^2)}{4^4}=\frac{21}{64},P(X=3)=\frac{4}{4^4}=\frac{1}{64}.$$

于是 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{6}{64}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{1}{64}$

故 $E(X)=0\times\frac{6}{64}+1\times\frac{36}{64}+2\times\frac{21}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{81}{64}$,

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\left(0^2\times\frac{6}{64}+1^2\times\frac{36}{64}+2^2\times\frac{21}{64}+3^2\times\frac{1}{64}\right)-\left(\frac{81}{64}\right)^2=\frac{1695}{64^2}.$$

【例 3.3】 设袋中有 n 张卡片,记号码为 $1,2,\cdots,n$,从中任取 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 张,求号码之和的数学期望.

【解】 设 X 表示取出的 m 张号码之和,m 个号码分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_m$.

显然 $X=X_1+X_2+\cdots+X_m$.

假设每张卡片被抽到的可能性相等,于是

$$P(X_i=k)=\frac{1}{n},1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant i\leqslant m,$$

$$E(X_i)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2},1\leqslant i\leqslant m,$$

故 $E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_m)=mE(X_i)=\frac{m(n+1)}{2}.$

【例 3.4】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为正的相互独立随机变量,具有相同的分布,试求:

$$E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right),\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

【解】 因为 $1=E\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)$

$$=E\left(\frac{X_1}{X_1+X_2+\cdots+X_n}+\cdots+\frac{X_n}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)$$

$$=nE\left(\frac{X_i}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right),$$

所以 $E\left(\frac{X_i}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=\frac{1}{n}$,

故 $E\left(\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right)=E\left(\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}+\cdots+\frac{X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)$

$$=k\left(\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{k}{n}.$$

【例 3.5】 设某一机器加工一种产品的次品率为 0.1,检验员每天检验 4 次,每次随机地抽取 5 件产品检验,如果发现多于 1 件次品,就要调整机器. 求一天中调整机器次

数的概率分布及数学期望.

【解】 设 X 表示每次取出5件产品中的次品数，$X \sim B(5,0.1)$，于是次品数大于1，即需要调整机器的概率为

$$P = P(X>1) = 1-P(X\leqslant 1) = 1-P(X=0)-P(X=1)$$
$$= 1-(1-0.1)^5 - C_5^1 \times 0.1 \times (1-0.1)^4 = 0.082.$$

设 Y 表示一天中机器需要调整的次数，$Y \sim B(4,0.082)$.

于是 $P\{Y=k\} = C_4^k(0.082)^k(1-0.082)^{4-k}, k=0,1,2,3,4.$

故一天中调整机器次数的数学期望为 $E(Y) = 4\times 0.082 = 0.328.$

【例 3.6】 设某产品每周需求量为 Q，Q 的可能取值为1,2,3,4,5(等可能取各值)，生产每件产品成本是 $C_1=3$ 元，每件产品售价为 $C_2=9$ 元；没有售出的产品以每件 $C_3=1$ 元的费用存入仓库. 问生产者每周生产多少件产品可使所期望的利润最大.

【解】 设每周的产量为 N，显然 $N\leqslant 5$，每周利润

$$L=\begin{cases}(C_2-C_1)N, & \text{当 } Q>N\\ C_2Q-C_1N-C_3(N-Q), & \text{当 } Q\leqslant N\end{cases}=\begin{cases}6N, & \text{当 } Q>N,\\ 10Q-4N, & \text{当 } Q\leqslant N.\end{cases}$$

利润的数学期望为

$$E(L) = 6NP(Q>N)+(10Q-4N)\cdot P(Q\leqslant N)$$
$$= 6N\sum_{N+1}^{5}\frac{1}{5}+10\sum_{n=1}^{N}n\cdot\frac{1}{5}-4N\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{5}$$
$$= \frac{6}{5}N(5-N)+2\cdot\frac{1+N}{2}\cdot N-\frac{4N^2}{5}$$
$$= 7N-N^2.$$

以下求使 $E(L)$ 达到最大值的 N.

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N}(E(L)) = 7-2N = 0$，得 $N=3.5$.

因为 $\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}N^2}(E(L))\right|_{N=3.5} = -2<0$，所以 $N=3.5$ 时，$E(L)$ 达最大值.

由于需求量 Q 与产量 N 均取正整数，所以应取 $N=3$ 或 $N=4$，故当产量为3件或4件时，利润达到最大期望值12元.

【例 3.7】 设随机变量 X 的密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}$，$(-\infty,+\infty)$，求 $E(X)$，$D(X)$.

【解】 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)\mathrm{e}^{-|x-\mu|}\mathrm{d}x+\frac{\mu}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\mu)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}\mathrm{d}x.$$

因为 $t\mathrm{e}^{-|t|}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t$ 收敛，

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t=0$，又 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}$ 为密度函数，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}\mathrm{d}x=1$.

故 $E(X)=\mu$，

$$D(X)=E(X-E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x-\mu|}\mathrm{d}x.$$

$$\xlongequal{\text{令 } x-u=t}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{d}t\xlongequal{\text{偶数积分性质}}\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=-t^2\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^{+\infty}+$$

$$2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=0+(-2t\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^{+\infty}=2.$$

题型Ⅱ 一维随机变量函数的数字特征

【解题提示】 (1) 设 Y 是随机变量 X 的函数：$Y=g(X)$，其中 g 是连续函数，若①X 为离散型随机变量，其分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $$E(Y)=E(g(X))=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k.$$

②X 为连续型随机变量，其分布密度为 $f(x)$

则 $$E(Y)=E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 无论 X 是离散型还是连续型，$Y=g(X)$ 的方差用公式计算为

$$D(Y)=D(g(X))=E(Y^2)-[E(Y)]^2.$$

【例 3.8】 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)},x\in(-\infty,+\infty)$，求 $E[\min(|X|,1)]$.

【解】 $$E[\min(|X|,1)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(|x|,1)f(x)\mathrm{d}x=\int_{|x|<1}|x|f(x)\mathrm{d}x+\int_{|x|\geqslant 1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1\frac{x}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x+2\int_1^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\arctan x\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}.$$

【例 3.9】 设连续型随机变量 X 的分布密度为 $f(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<2,\\ cx+b, & 2\leqslant x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 已知 $E(X)=2$，$P(1<X<3)=\dfrac{3}{4}$，求：(1) 常数 a,b,c 之值；(2) 随机变量 $Y=\mathrm{e}^X$ 的期望与方差.

【解】 (1) 由分布密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，得

$$1=\int_0^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^4(cx+b)\mathrm{d}x=2a+6c+2b, \quad ①$$

又 $$E(X)=2=\int_0^2 ax^2\mathrm{d}x+\int_2^4(cx^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}c+6b, \quad ②$$

再由 $$P(1<X<3)=\frac{3}{4}=\int_1^2 ax\mathrm{d}x+\int_2^3(cx+b)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}a+\frac{5}{2}c+b, \quad ③$$

解联立方程 ①，②，③，得 $a=\dfrac{1}{4},b=1,c=-\dfrac{1}{4}$；

(2) $E(Y)=E(e^X)=\int_0^2\frac{1}{4}xe^x\mathrm{d}x+\int_2^4\left(-\frac{1}{4}x+1\right)e^x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(e^2-1)^2$,

$E(Y^2)=E(e^{2X})=\int_0^2\frac{1}{4}xe^{2x}\mathrm{d}x+\int_2^4\left(-\frac{1}{4}x+1\right)e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{16}(e^4-1)^2$,

故　$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{16}(e^4-1)^2-\frac{1}{16}(e^2-1)^4$

$=\frac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$.

【例 3.10】 据预测,国际市场每年对我国某商品的需求量 X 在$[a,b]$上服从均匀分布.每出口一单位商品可获 c 货币单位,若积压一单位商品则亏损 d 货币单位,现由某家公司单独经营此出口业务,问该公司应储备多少该种产品,才可使所获利润的数学期望最大?

【解】 设该公司应储备的该种商品量为 $y,a\leqslant y\leqslant b$.则该公司所获利润为

$$L=\begin{cases}cX-\mathrm{d}(y-X), & a\leqslant X\leqslant y\\ cy, & y\leqslant X\leqslant b\end{cases}.$$

X 的概率密度为　$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

于是　$E(L)=\int_a^y[(c+\mathrm{d})x-dy]\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x+\int_y^b cy\cdot\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{b-a}\left[(c+d)\cdot\frac{x^2}{2}-dyx\right]_a^y+\frac{1}{b-a}cyx\Big|_y^b$

$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{c+d}{2}(y^2-a^2)-dy(y-a)+cy(b-y)\right]$.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}E(L)=\frac{1}{b-a}[(c+d)y-2(c+d)y+ad+bc]$,

令　$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}E(L)=0$,得　$y=\frac{ad+bc}{c+d}$.

故该公司储备的该种商品量为$\frac{ad+bc}{c+d}$时,所获利润期望最大.

【例 3.11】 设一批 100 件产品中有 10 个不合格品,据验收规则,从中任取 5 件产品进行质量检验,假如其中没有不合格品,则这批产品被接收,否则就要重新对这批产品逐个检验,求:(1) 任取的 5 件产品中不合格品件数 X 的概率分布、数学期望及方差;(2) 求需要对这批产品进行逐个检验的概率 Q;(3) 将 X 的分布与二项分布比较.

【解】 (1) $P(X=m)=\frac{C_{10}^mC_{90}^{5-m}}{C_{100}^5}$,$(m=0,1,2,3,4,5)$—— 超几何分布

X 的分布律

X	0	1	2	3	4	5
P	0.583	0.340	0.070	0.007	0.000	0.000

X 的数学期望 $E(X)=5\times\frac{10}{100}=0.5$,

X 的方差　$D(X)=npq(\frac{N-n}{N-1})=5\times\frac{10}{100}\cdot\frac{90}{100}\cdot\frac{95}{99}=0.432$.

注 超几何分布：$P\{X=m\}=\dfrac{C_{N_1}^m C_{N_2}^{N-M}}{C_{N_1+N_2}^n}(m=0,1,\cdots,\min\{n,N_1\})$，

$E(X)=np, D(X)=npq\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$，其中 $p=\dfrac{N_1}{N}, q=\dfrac{N_2}{N}, N=N_1+N_2$.

其参数 n,N_1,N_2 均为自然数.

(2) 需要进行逐个检验的概率为

$Q=P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0.583=0.417$.

(3) $P(X=0)=0.583$ $\quad C_5^0\times(0.1)^0\times(0.90)^5=0.590$

$P(X=1)=0.340$ $\quad C_5^1\times(0.1)^1\times(0.90)^4=0.328$

$P(X=2)=0.070$ $\quad C_5^2\times(0.1)^2\times(0.90)^3=0.073$

$P(X=3)=0.007$ $\quad C_5^3\times(0.1)^3\times(0.90)^2=0.0081$

$P(X=4)=0$ $\quad C_5^4\times(0.1)^4\times 0.90=0.00045$

$P(X=5)=0$ $\quad C_5^5\times(0.1)^5\times(0.90)^0=0.00001$

故可知 $P(X=m)=\dfrac{C_{N_1}^m\cdot C_{N-N_1}^{n-m}}{C_N^n}\approx C_n^m p^m q^{n-m}$.

题型Ⅲ　求二维随机变量的数字特征

【解题提示】 已知二维随机变量 (X,Y) 的分布密度(或联合分布律)，求 $E(X),D(X),E(Y),D(Y)$ 或协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 及相关系数 ρ_{XY}，一般按如下程序进行：

① 求出 (X,Y) 关于 X,Y 的边缘密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

② 利用如下公式计算相关的量：

离散型：$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$，则

$$E(X)=\sum_i x_i p_{i\cdot}=\sum_i\sum_j x_i p_{ij},\qquad E(Y)=\sum_j y_j p_{\cdot j}=\sum_i\sum_j y_j p_{ij},$$

$$D(X)=\sum_i\sum_j[x_i-E(X)]^2p_{ij},\quad D(Y)=\sum_i\sum_j[y_j-E(Y)]^2p_{ij}.$$

连续型：(X,Y)，的联合密度为 $f(x,y)$，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yy_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f_X(x)\mathrm{d}x;\qquad D(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}[y-E(Y)]^2f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$.

相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$.

注 1° 当 X,Y 相互独立时，$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$；$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$；

2° 当 X,Y 不相互独立时，$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$；

3° 当 (X,Y) 为二维正态分布时，则 X 与 Y 不相关，等价于 X 与 Y 相互独立；

4° 正态随机变量的线性组合仍为正态分布.

【例 3.12】 设二维随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求：(1) 常数 c；(2)$E(X),E(Y),D(X),D(Y)$；(3)$\mathrm{Cov}(X,Y)$，相关系数 ρ_{XY}.

【解】 (1)$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y\mathrm{d}y=c\int_0^1\frac{1}{2}x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{8}c \quad\Rightarrow\quad c=8.$

所以 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2)$E(X)=\int_0^1(\int_0^x x\cdot 8xy\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=8\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^x y\mathrm{d}y=4\int_0^1 x^4\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$,

$$E(Y)=\int_0^1(\int_y^1 y\cdot 8xy\mathrm{d}x)\mathrm{d}y=\frac{8}{15},$$

$$E(X^2)=\int_0^1(\int_0^x x^2\cdot 8xy\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=8\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\int_0^x y\mathrm{d}y=4\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1(\int_y^1 y^2\cdot 8xy\mathrm{d}x)\mathrm{d}y=\frac{1}{3},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{11}{225},$$

$$E(XY)=\int_0^1(\int_0^x xy\cdot 8xy\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=8\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x=\frac{4}{9}.$$

(3)$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$,

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\ \sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{2}{75}}\sqrt{\frac{11}{225}}}=\frac{2\sqrt{66}}{33}.$$

【例 3.13】 已知(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	−1	0	1
−1	1/8	1/8	1/8
0	1/8	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

试求：(1)$E(X),E(Y),D(X),D(Y)$； (2)$\mathrm{Cov}(X,Y),\rho_{XY}$；

(3) 问 X,Y 是否相关?是否独立?

【解】 (1) 先求出 X 与 Y 的边缘分布律分别为

X	−1	0	1
$P_{i.}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Y	−1	0	1
$P_{.j}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

$E(X)=(-1)\times\frac{3}{8}+0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{3}{8}=0$, $E(Y)=0$,

$E(X^2)=0\times\frac{2}{8}+1\times\frac{6}{8}=\frac{6}{8},E(Y^2)=\frac{6}{8},$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{6}{8}-0=\frac{6}{8},D(Y)=\frac{6}{8};$

(2) $E(XY)=(-1)(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times 0\times\frac{1}{8}+(-1)\times 1\times\frac{1}{8}+0\times(-1)\times\frac{1}{8}+0\times 0\times 0+0\times 1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times 0\times\frac{1}{8}+1\times 1\times\frac{1}{8}=0,$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,\quad \rho_{XY}=0;$

(3) 因 $\rho_{XY}=0$,所以,X 与 Y 不相关,

$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}\neq\frac{3}{8}\times\frac{3}{8}=P(X=-1)\cdot P(Y=-1)$,所以 X 与 Y 不相互独立.

题型Ⅳ 二维随机变量(X,Y)函数 $Z=g(X,Y)$ 的数字特征

【解题提示】 记住如下公式:

(1) 设(X,Y)为离散型,联合分布律为

$P(X=X_i,Y=Y_j)=P_{ij}(i,j=1,2,\cdots).$

则 $E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)P_{ij},$

$D(Z)=D[g(X,Y)]=E(Z^2)-[E(Z)]^2.$

(2) 设(X,Y)为连续型,联合密度为 $f(x,y)$,

则 $E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

$D(Z)=D[g(X,Y)]=E(Z^2)-[E(Z)]^2.$

【例 3.14】 已知 $D(X)=25,D(Y)=36,\rho_{XY}=0.4$,求 $D(X+Y)$ 及 $D(X-Y)$.

【解】 因为 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$

$=D(X)+D(Y)\pm 2\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\rho_{XY}.$

故 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=25+36+2\sqrt{25}\sqrt{36}\times 0.4=85,$

$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)=25+36-2\sqrt{25}\sqrt{36}\times 0.4=37.$

【例 3.15】 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,试求:$Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数 $\rho_{z_1z_2}$,其中 α,β 均为常数.

【解】 由题意 $E(X)=E(Y)=\mu,D(X)=D(Y)=\sigma^2,$

$E(Z_1)=E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)=\mu(\alpha+\beta),E(Z_2)=\mu(\alpha-\beta),$

$D(Z_1)=D(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=\sigma^2(\alpha^2+\beta^2),D(Z_2)=\sigma^2(\alpha^2+\beta^2),$

$E(Z_1Z_2)=E(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)=E(\alpha^2X^2-\beta^2Y^2)=\alpha^2E(X^2)-\beta^2E(Y^2),$

$=\alpha^2\{D(X)+[E(X)^2]\}-\beta^2\{D(Y)+[E(Y)]^2\}$

$=\alpha^2(\sigma^2+\mu^2)-\beta^2(\sigma^2+\mu^2)$

$=(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)$

(注:$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2\Rightarrow E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$)

故 $\rho_{z_1z_2} = \dfrac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}} = \dfrac{E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}}$

$= \dfrac{(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)-\mu^2(\alpha^2-\beta^2)}{\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)} = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$

【例 3.16】 设 $E(X)=2, E(Y)=4, D(X)=4, D(Y)=9, \rho_{XY}=0.5$，求：(1) $U=3X^2-2XY+Y^2-3$ 的数学期望；(2) $V=3X-Y+5$ 的方差.

【解】 (1) $E(U)=E(3X^2-2XY+Y^2-3)$

$=3\{D(X)+[E(X)]^2\}-2[E(X)\cdot E(Y)+\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}]+[D(Y)+(E(Y))^2]-3=24,$

(2) $D(V)=D(3X-Y+5)=9D(X)+D(Y)-6\mathrm{Cov}(X,Y)$

$=45-6\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=27.$

【例 3.17】 设 X,Y 是随机变量，均服从标准正态分布，相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{1}{2}$，令 $Z_1=aX$，$Z_2=bX+cY$，试确定 a,b,c 的值，使 $D(Z_1)=D(Z_2)=1$ 且 Z_1 与 Z_2 不相关.

【解】 由题设可知　$E(X)=E(Y)=0, D(X)=D(Y)=1, \rho_{XY}=\dfrac{1}{2}.$

于是，$D(Z_1)=D(aX)=a^2D(X)=a^2$，

$D(Z_2)=D(bX+cY)=D(bX)+D(cY)+2\mathrm{Cov}(bX,cY)$

$=b^2D(X)+c^2D(Y)+2bc\mathrm{Cov}(X,Y)=b^2+c^2+2bc\cdot1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}$

$=b^2+c^2+bc$（因为 $\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$），

$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=\mathrm{Cov}(aX,bX+cY)=ab\,\mathrm{Cov}(X,X)+ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)=ab+\dfrac{1}{2}ac.$

再由题意有 $a^2=1, b^2+c^2+bc=1,\quad ab+\dfrac{1}{2}ac=0$，

$\Rightarrow\quad a=\pm1, b=\dfrac{1}{\sqrt3}, c=-\dfrac{2}{\sqrt3}$，或 $a=\pm1, b=-\dfrac{1}{\sqrt3}, c=\dfrac{2}{\sqrt3}.$

题型 V　多维随机变量数字特征的求解技巧（(0－1) 分布分解法简介）

【解题提示】 求解多维随机变量 X 的数学特征的程序：

(1) 分析欲求解的随机变量 X 是否可看成若干随机变量 X_i 的和，而 X_i 服从(0－1)分布；

(2) 引入新随机变量 X_i，$X_i=\begin{cases}1, & 第\ i\ 事件发生,\\ 0, & 第\ i\ 事件不发生;\end{cases}$

(3) 求出 $E(X_i), D(X_i)$；

(4) 再分析 X_i 与 X_j 是否相互独立，然后根据相应公式求出 $E(X), D(X)$.

设 $P(X_i=1)=P, P(X_i=0)=1-P$，则 $E(X_i)=P, D(X_i)=P(1-P)$，

则　$E(X)=\sum\limits_i E(X_i).$

$$D(X)=D(\sum_i X_i)\xlongequal{X_i\ 与\ X_j\ 相互独立}\sum_i D(X_i)=\sum_i P(1-P),$$

$$D(X)=D(\sum_i X_i)\xlongequal{X_i\ 与\ X_j\ 不独立}\sum_i D(X_j)+2\sum_{i<j}\sum\mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

【例 3.18】 一民航大巴载有 50 位旅客从机场开出，旅客有 10 个车站可以下车，如到达一车站没有人下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$.（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并且各旅客是否下车相互独立）

【分析】 停车次数 X 可看作 $X_i(i=1,2,\cdots,10)$ 的和，X_i 服从 $(0-1)$ 分布，因此该题可用 $(0-1)$ 分解法求解.

【解】 引入随机变量 $X_i=\begin{cases}0,\text{在第 } i \text{ 站没有人下车},\\1,\text{在第 } i \text{ 站有人下车},\end{cases}(i=1,2,\cdots,10)$

$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$.

由题意，任一旅客在第 i 站不下车的概率为 $\frac{9}{10}$. 因此 50 位旅客均不在第 i 站下车的概率为 $\left(\frac{9}{10}\right)^{50}$，在第 i 站有人下车的概率为 $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}$. 即

$$P(X_i=0)=\left(\frac{9}{10}\right)^{50},\quad P(X_i=1)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50},i=1,2,\cdots,10,$$

于是 $E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50},D(X_i)=\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\right]$,

故 $E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})=E(X_1)+\cdots+E(X_{10})=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\right]$.

因为 X_i 与 X_j 相互独立，

所以 $D(X)=D(X_1+\cdots+X_{10})=\sum_{i=1}^{10}D(X_i)=10\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{50}\right]$.

【例 3.19】 设有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开锁，用它们逐一去试开锁，抽哪一把是等可能的，且每一次开锁是相互独立的，每把钥匙试开一次后拿走，记 X 表示打开锁时已经试开过锁的次数，求 $E(X)$.

【解】 引入随机变量 $X_i=\begin{cases}0,\text{前}(i-1)\text{ 次取的钥匙中有能打开锁的},\\1,\text{前}(i-1)\text{ 次取的钥匙中没有能打开锁的},\end{cases}i=1,2,\cdots,n.$

$X_1=1,E(X_1)=1$,

$X=X_1+\sum_{i=2}^{n}X_i,X_i\sim(0-1)$ 分布，

$$E(X)=E(X_1)+\sum_{i=2}^{n}E(X_i)=1+\sum_{i=2}^{n}P(X_i=1).$$

而
$$\begin{aligned}P(X_i=1)&=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-1}})\\&=P(\overline{A_{i-1}}\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{i-2}})P(\overline{A_{i-2}}\mid\overline{A_1}\cdots\overline{A_{i-3}})\cdots P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_1})\\&=\frac{n-i+1}{n-i+2}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{n-i+1}{n},\end{aligned}$$

故
$$\begin{aligned}E(X)&=E(X_1)+\sum_{i=2}^{n}E(X_i)=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{n-i+1}{n}=1+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}(n-i+1)\\&=1+\frac{1}{n}[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]\\&=\frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

【例 3.20】 将 n 个球随机地放入 N 个盒中，每个球放入各个盒是等可能的，求有球的盒子

数 X 的数学期望.

【解】 引入随机变量 $X_i=\begin{cases}0, 第\ i\ 个盒中无球,\\ 1, 第\ i\ 个盒中有球,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,N.$

显然　$X=X_1+X_2+\cdots+X_N$.

因为 $P(X_i=0)=\left(\frac{N-1}{N}\right)^n, P(X_i=1)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n, i=1,2,\cdots,$

于是　$E(X_i)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$, 故　$E(X)=\sum\limits_{i=1}^{N}E(X_i)=N\left[1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right]$.

【例 3.21】 将 n 只球（$1\sim n$ 号）随机地放进 n 只盒子（$1\sim n$ 号）中去，一只盒子装一只球，将一只球装入与球同号码的盒子中，称为一个配对，记 X 为配对的个数，求 $E(X)$，$D(X)$.

【解】 引入随机变量 $X_i=\begin{cases}1, 第\ i\ 号球恰装入第\ i\ 号盒子,\\ 0, 第\ i\ 号球不是装入第\ i\ 号盒子.\end{cases}$

则 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，　X_i 服从 $(0-1)$ 分布，$E(X_i)=1\cdot P(X_i=1)=\frac{1}{n}(i=1,\cdots,n)$，

于是　$E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$.

又　$D(X_i)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$，$\{X_i\}$ 之间不独立.

所以 $D(X)=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum\limits_{i<j}\sum\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$，

$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)$，

其中　$X_iX_j=\begin{cases}1, 第\ i\ 号球和第\ j\ 号球均配上对,\\ 0, 其他情况.\end{cases}$

$X_iX_j\sim(0-1)$ 分布.

于是　$E(X_iX_j)=P(X_iX_j=1)=P(X_i=1,X_j=1)$
$=P(X_i=1)P(X_j=1\mid X_i=1)$
$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$,

所以　$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(n-1)}$, $2\sum\limits_{i<j}\sum\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=2\frac{C_n^2}{n^2(n-1)}=\frac{1}{n}$,

故　$D(X)=n\cdot\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}=1$.

题型 Ⅵ　有关证明题

【例 3.22】 设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，并定义随机变量 X，Y 如下：

$X=\begin{cases}1, 若\ A\ 发生\\ 0, 若\ A\ 不发生,\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, 若\ B\ 发生,\\ 0, 若\ B\ 不发生.\end{cases}$

证明：若 $\rho_{XY}=0$，则 X 和 Y 必定相互独立.

【证】 X，Y 的分布律分别为

X	1	0
P	$P(A)$	$P(\bar{A})$

Y	1	0
P	$P(B)$	$P(\bar{B})$

XY	1	0
P	$P(AB)$	$1-P(AB)$

于是 $E(X)=P(A),E(Y)=P(B),E(XY)=P(AB)$,

$$0=\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y),$$

即 $P(AB)=P(A)P(B)$,故 A 与 B 相互独立,由事件独立的性质可知 A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立,于是

$$P(X=1,Y=1)=P(AB)=P(A)P(B)=P(X=1)P(Y=1),$$
$$P(X=1,Y=0)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=P(X=1)P(Y=0),$$
$$P(X=0,Y=1)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=P(X=0)P(Y=1),$$
$$P(X=0,Y=0)=P(\bar{A}\,\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=P(X=0)P(Y=0).$$

故 X 与 Y 相互独立.

【例 3.23】 设随机变量 X 与 Y 相互独立,证明:

$$D(XY)=D(X)\cdot D(Y)+[E(X)]^2D(Y)+[E(Y)]^2D(X).$$

【证】
$$\begin{aligned}D(XY)&=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)]^2[E(Y)]^2\\&=[E(X^2)-(E(X))^2]E(Y^2)+[E(X)]^2E(Y^2)-(E(X))^2(E(Y))^2\\&=D(X)\cdot E(Y^2)+(E(X))^2[E(Y^2)-(E(Y))^2]\\&=D(X)[E(Y^2)-(E(Y))^2]+[E(X)]^2D(Y)+D(X)\cdot(E(Y))^2\\&=D(X)\cdot D(Y)+(E(X))^2D(Y)+(E(Y))^2D(X).\end{aligned}$$

【例 3.24】 设 $X=aX_1+b,Y=cX_2+d$,其中 a、b、c、d 均为常数,且 a,c 同号,证明:$\rho_{XY}=\rho_{X_1X_2}$

【证】 $E(X)=E(aX_1+b)=aE(X_1)+b;E(Y)=cE(X_2)+d$,

$D(X)=a^2D(X_1),\quad D(Y)=c^2D(X_2)$,

$E(XY)=E[(aX_1+b)(cX_2+d)]=acE(X_1X_2)+bcE(X_2)+adE(X_1)+bd$,

$$\begin{aligned}E(X)\cdot E(Y)&=(aE(X_1)+b)(cE(X_2)+d)\\&=acE(X_1)\cdot E(X_2)+bcE(X_2)+adE(X_1)+bd,\end{aligned}$$

$E(XY)-E(X)E(Y)=ac[E(X_1X_2)-E(X_1)\cdot E(X_2)]$,

于是 $$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{ac[E(X_1X_2)-E(X_1)\cdot E(X_2)]}{ac\sqrt{D(X_1)}\sqrt{D(X_2)}}=\rho_{X_1X_2}.$$

第四章　大数定律和中心极限定理

题型 Ⅰ　估算随机事件的概率

【解题提示】 常用的方法有两种：

(1) 利用切比雪夫不等式：

设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$，则如下不等式称为切比雪夫不等式

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

或者

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

解题程序：① 依题意选择随机变量 X，求出 $E(X)$，$D(X)$；

② 将 $P\{a<X<b\}$ 化为 $P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$，或 $P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}$；

③ 由切比雪夫不等式作出 $P\{a<X<b\}$ 的估计.

(2) 利用中心极限定理(解题的指导思想是化为标准正态分布)：

常用的中心极限定理有：

定理 1　林德伯格—列维定理(独立同分布的中心极限定理)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布的随机变量，且 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2\neq 0(i=1,2,\cdots)$，则对于任何实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

定理 2　德莫佛—拉普拉斯定理(二项分布以正态分布为极限)

设随机变量 $\eta_n(n=1,2,\cdots)$ 服从参数为 $n,P(0<P<1)$ 的二项分布，则对于任何实数 x，有 $\lim\limits_{n\to\infty m}P\left\{\frac{\eta_n-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\leqslant x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

解题程序：

① 判别随机变量(序列)是属于伯努利分布，还是独立同分布，并求出数学期 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$；

② 写出相应的随机变量

$$U=\frac{\overline{X}-E(X)}{\sqrt{D(X)}}=\begin{cases}\dfrac{\eta_n-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}, & X_i\text{ 服从伯努利分布},\\[2ex] \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}, & X_i\text{ 服从独立同分布}.\end{cases}$$

③ $P\{U\leqslant x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$，

常用形式：$P\{a<\eta_n<b\}\approx\Phi\left(\frac{b-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right)$

$$P\{|\eta_n|<\varepsilon\}\approx 2\Phi\left(\left|\frac{\varepsilon-nP}{\sqrt{nP(1-P)}}\right|\right)-1.$$

【例 4.1】 在每次试验中,事件 A 发生的概率为 0.5,利用切比雪夫不等式估计,在 1000 次独立重复试验中,事件 A 发生的次数在 $400 \sim 600$ 之间的概率.

【解】 设 X 表示在 1000 次独立重复试验中,事件 A 发生的次数,则 $X \sim B(1000,0.5)$

$E(X) = np = 1000 \times 0.5 = 500, D(X) = np(1-p) = 1000 \times 0.5 \times 0.5 = 250$,

$400 < x < 600 \Leftrightarrow 400 - 500 < X - E(X) < 600 - 500 \Leftrightarrow |X - 500| < 100$,

于是　取 $\varepsilon = 100$,有

$$P\{400 < X < 600\} = P\{|X - 500| < 100\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{250}{100^2} = 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40}.$$

【例 4.2】 设在重复独立试验中,每次事件 A 发生的概率为 $\frac{1}{4}$,问是否可用 0.925 的概率,确信在 1000 次试验中,事件 A 发生的次数在 $200 \sim 300$ 之间.

【解】 设 X 表示 1000 次独立重复试验中,事件 A 发生的次数,则 $X \sim B(1000, \frac{1}{4})$.

$E(X) = 1000 \times \frac{1}{4} = 250, D(X) = nP(1-P) = 1000 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{375}{2}$, $200 < X < 300 \Leftrightarrow 200 - 250 < X - E(X) < 300 - 250 \Leftrightarrow |X - 250| < 50$,于是,取 $\varepsilon = 50$,有

$$P\{200 < X < 300\} = P\{|X - 250| < 50\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\frac{375}{2}}{50^2} = 0.925.$$

这说明在 1000 次试验中,A 发生次数在 $200 \sim 300$ 的概率不小于 0.925.

【例 4.3】 某微机系统有 120 个终端,每个终端有 5% 的时间在使用.若各终端使用与否是相互独立的,试求有不少于 10 个终端在使用的概率.

【解】 设 X 表示使用终端的数目,则 $X \sim B(120, 0.05)$,

$E(X) = 120 \times 0.05 = 6, D(X) = 120 \times 0.05 \times 0.95 = 5.7$,

$$P\{X \geqslant 10\} = 1 - P(X < 10) = 1 - P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} < \frac{10 - 6}{\sqrt{5.7}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi(1.7) = 0.045.$$

【例 4.4】 利用切比雪夫不等式及中心极限定理估计下面的概率:$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\}$,并进行比较,其中 μ_n 是 n 次伯努利试验中事件 A 发生的次数,p 为事件 A 每次试验时发生的概率.

【解】 $E\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = p, D\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(\mu_n) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}, q = 1 - p$,

由切比雪夫不等式有

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{pq}{n} = \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$

由中心极限定理估计有

$$P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 1 - P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 - P\left\{p - \varepsilon < \frac{\mu_n}{n} < p + \varepsilon\right\}$$
$$= 1 - P\left\{\frac{p - \varepsilon - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{\frac{\mu_n}{n} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < \frac{p + \varepsilon - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right\}$$

$$=1-P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}<\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)+\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\left[1-\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})\right].$$

【例 4.5】 将一枚硬币连掷 100 次，计算出现正面的次数大于 60 的概率.

【解】 设 X 表示掷 100 次出现正面的次数，则 $X\sim B(100,0.5)$，于是

$E(X)=100\times 0.5=50, D(X)=100\times 0.5\times(1-0.5)=25$,

于是 $$P\{X>60\}=1-P\{X\leqslant 60\}=1-P\left\{\frac{X-50}{\sqrt{25}}\leqslant\frac{60-50}{\sqrt{25}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(2)=0.0228.$$

【例 4.6】 检查员逐个地检查某种产品，每次花 10 秒钟检查一个，但也可能有的产品需要再花 10 秒钟重复检查一次，假设每个产品需要复检的概率为 0.5，求在 8 小时内检查员检查的产品个数多于 1600 个的概率是多少？

【解】 引入随机变量 X_i（表示第 i 个产品花费的时间）

$$X_i=\begin{cases}10, \text{第 } i \text{ 个不需复检},\\ 20, \text{第 } i \text{ 个需复检},\end{cases}$$

则 $X=\sum_{i=1}^{1600}X_i$ —— 检查 1600 个产品所需花时间.

于是 $E(X_i)=10\times 0.5+20\times 0.5=15$,

$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=10^2\times 0.5+20^2\times 0.5-15^2=25.$

由独立同分布的林德伯格－列维定理可知

$$P\{X\leqslant 8\times\underset{(\text{秒钟})}{3600}\}=P\left\{\frac{X-nE(X_i)}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant\frac{8\times 3600-nE(X_i)}{\sqrt{n}\times\sigma}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-1600\times 15}{\sqrt{1600}\times 5}\leqslant\frac{8\times 3600-1600\times 15)}{\sqrt{1600}\times 5}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{X-1600\times 15}{40\times 5}\leqslant 24\right\}\approx\Phi(24)=1.$$

【例 4.7】 一保险公司有 10000 人投保，每人每年付 12 元保险费. 已知一年内投保人死亡率为 0.006，如死亡，公司付给死者家属 1000 元，求：(1) 保险公司年利润为 0 的概率；(2) 保险公司年利润不少于 60000 元的概率.

【解】 设 X 为投保的 10000 人中一年内死亡的人数，则 $X\sim B(10000,0.006)$,

$E(X)=10000\times 0.006=60, D(X)=10000\times 0.006\times(1-0.006)=59.64$,

(1) 设保险公司利润为 Y，则

$Y=10000\times 12-1000X=0\Rightarrow X=120$,

由泊松定理 $P\{X=120\}=\dfrac{60^{120}}{120!}\cdot e^{-60}\approx 0$;

(2)$P\{Y\geqslant 60000\}=P\{10000\times 12-1000X\geqslant 60000\}=P\{0\leqslant X\leqslant 60\}$

$$=P\left\{\frac{0-60}{\sqrt{59.64}}<\frac{X-E(X)}{\sqrt{59.64}}\leqslant\frac{60-60}{\sqrt{59.64}}\right\}$$

$$\approx\Phi(0)-\Phi(\frac{-60}{\sqrt{59.64}})=\Phi(0)-\Phi(-7.77)=0.5.$$

题型Ⅱ　试验次数 n 的确定

【解题提示】　一般是通过中心极限定理求解 n.

解题程序：

(1) 将随机变量的不等式关系：$a < X \leqslant n \Rightarrow \dfrac{a-E(X)}{\sqrt{D(X)}} < \dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \leqslant \dfrac{n-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$,

$$(2) P\{a < X \leqslant n\} = P\left\{\frac{a-E(X)}{\sqrt{D(X)}} < \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \leqslant \frac{n-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{n-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) \geqslant P,$$

(3) 查正态分布表，解不等式，得出 n 值.

【例 4.8】　计算机作加法时，先对加数取整(取最靠近该数的整数)，设所有的取整误差是相互独立的随机变量，且都在区间$[-0.5,0.5]$上服从均匀分布．求：(1) 若将 1500 个数相加，总误差超过 15 的概率；(2) 最多多少个相加能使绝对误差总和不超过 10 的概率不小于 0.90.

【解】　设 X_i 在$(i=1,2,\cdots,1500)$为各个数的取整误差，

因为 X_i 在$[-0.5,0.5]$上服从均匀分布，所以 $E(X_i)=0, D(X_i)=\dfrac{1}{12}$.

(1) 令 $X=\sum\limits_{i=1}^{1500} X_i$，则 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{1500} E(X_i)=0, D(X)=1500\times\dfrac{1}{12}=125$.

由林德伯格－列维中心极限定理，有

$$P\{|X|>15\} = 1-P\{|X|\leqslant 15\}$$

$$=1-P\left\{\frac{-15-0}{\sqrt{1500}\sqrt{\frac{1}{12}}} \leqslant \frac{X-0}{\sqrt{1500}\sqrt{\frac{1}{12}}} \leqslant \frac{15-0}{\sqrt{1500}\sqrt{\frac{1}{12}}}\right\}$$

$$\approx 1\left[2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{1500}\sqrt{\frac{1}{12}}}\right)-1\right] = 1-[2\Phi(1.342)-1]$$

$$=1-(2\times 0.9099-1)=0.1802.$$

(2) 令 $X_n=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，由题意求 n，使

$P\{|X_n|<10\}\geqslant 0.90$.

由林德伯格－列维中心极限定理，有

$$P\left\{\left|\frac{X_n-0}{\sqrt{n/12}}\right| < \frac{10}{\sqrt{n/12}}\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-1 \geqslant 0.90,$$

$\Rightarrow \Phi\left(\dfrac{10}{\sqrt{n/12}}\right)\geqslant 0.95$. 查表得 $10\sqrt{\dfrac{12}{n}}\geqslant 1.645$,

解之 $n\leqslant 443.5$，从而 $n=443$.

【例 4.9】　一个复杂系统由 100 个相互独立的元件组成，在系统运行期间每个元件损坏的概率均为 0.10. 又知为使系统正常运行，至少必须有 85 个元件工作．求：(1) 系统的可靠度(即正常运行的概率)；(2) 上述系统假如由 n 个相互独立的元

件组成，而且又要求至少有 80% 的元件工作才能使整个系统正常运行，问 n 至少为多大时，才能保证系统的可靠度为 0.95？

【解】 (1) 设 $X_i = \begin{cases} 1, 第\ i\ 个元件没有损坏, \\ 0, 第\ i\ 个元件损坏. \end{cases}$

X 为系统正常运行时完好的元件个数，则 $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$，$X_i(i=1,2,\cdots,100)$ 服从 $(0-1)$ 分布，$X = \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100,0.9)$，

于是 $E(X) = 100 \times 0.9 = 90$，$D(X) = npq = 100 \times 0.9 \times 0.1 = 9$，

故所求概率为 $P\{X \geqslant 85\} = 1 - P\{X < 85\} = 1 - P\left\{\frac{X-90}{\sqrt{9}} \leqslant \frac{85-90}{\sqrt{9}}\right\}$

$$= 1 - P\left\{\frac{X-90}{3} \leqslant -\frac{5}{3}\right\} \approx 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = 0.952,$$

(2) $P\{X \geqslant 0.8n\} = P\left\{\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}} \geqslant \frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{n} \times 0.3}\right\} = P\left\{\frac{X-0.9n}{0.3\sqrt{n}} \geqslant -\frac{\sqrt{n}}{3}\right\}$

$$\approx \int_{-\frac{\sqrt{n}}{3}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}}{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right),$$

查 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} = 1.65 \Rightarrow n = 24.5$ 取 $n = 25$.

题型 Ⅲ 证明题

【例 4.10】 设 X 为连续型随机变量，且 $E(e^{kx})(k > 0)$ 存在，则 $P\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{E(e^{kx})}{e^{k\varepsilon}}$.

【证】 因为 $E(e^{kX})$ 存在，所以

$$P\{X \geqslant \varepsilon\} = P\{kX \geqslant k\varepsilon\} = P\{e^{kx} \geqslant e^{k\varepsilon}\}$$

$$= \int_{e^{kx} \geqslant e^{k\varepsilon}} f(x) dx \ (f(x)\ 为\ X\ 的分布密度)$$

$$\leqslant \int_{e^{kx} \geqslant e^{k\varepsilon}} \frac{e^{kx}}{e^{k\varepsilon}} f(x) dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{k\varepsilon}} [e^{kx} f(x)] dx = \frac{1}{e^{k\varepsilon}} E(e^{kx}).$$

【例 4.11】 用德莫佛－拉普拉斯中心极限定理证明，在伯努利试验中，若 $0 < p < 1$，则不论 k 如何，总有

$$P\{|\mu - np| < k\} \to 0, \quad (n \to \infty).$$

【解】 $P\{|\mu_n - np| < k\} = P\{np - k < \mu_n < np + k\}$

$$= P\left\{\frac{-k}{\sqrt{npq}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{k}{\sqrt{npq}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-k}{\sqrt{npq}}\right),$$

其中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

因为 $\lim_{n \to \infty} \left[\Phi\left(\frac{k}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{k}{\sqrt{npq}}\right)\right] = 0$，

故 $\quad P\{|\mu_n - np| < k\} \to 0, (n \to \infty)$.

【例 4.12】 设 $\{X_n\}, n = 1,2,\cdots$ 为互不相关的随机变量序列，且 $E(X_n) = \mu_n$，$D(X_n) = \sigma_n^2$

$\neq 0. n = 1,2,\cdots$, 若当 $n \to \infty$ 时, $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \to \infty$, 则当 $n \to \infty$ 时, $Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}$ 依概率收敛于 0.

【解】 显然, $E(Y_n) = 0$, 且由 $\{X_n\}, n = 1,2\cdots$ 的互不相关性, 有

$$D(Y_n) = E(Y_n^2) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^2}\sum_{i,j=1}^{n}E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}D(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right]$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2},$$

由切比雪夫不等式, 对任给 $\varepsilon > 0$ 有

$$P\{|Y_n - E(Y)_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2} \to 0, (n \to \infty).$$

故 Y_n 依概率收敛于 0.

【例 4.13】 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \dfrac{x^m}{m!}e^{-x}(x \geqslant 0)$ 证明:

$$P\{0 < X < 2(m+1)\} \geqslant \frac{m}{m+1}.$$

【证】 $P\{0 < X < 2(m+1)\} = P\{-(m+1) < X-(m+1) < m+1\}$

$$= P\{|X-(m+1)| < m+1\},$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\frac{x^m}{m!}e^{-x}dx = \frac{1}{m!}\int_0^{+\infty}x^{m+1}e^{-x}dx = \frac{1}{m!}\Gamma(m+2)$$

$$= \frac{1}{m!}(m+1)! = m+1,$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\frac{x^m}{m!}e^{-x}dx = \frac{1}{m!}\int_0^{+\infty}x^{m+2}e^{-x}dx = \frac{1}{m!}\Gamma(m+3)$$

$$= (m+2)(m+1),$$

于是 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (m+2)(m+1) - (m+1)^2 = m+1$.

故由切比雪夫不等式有

$$P\{0 < X < 2(m+1)\} = P\{|X-(m+1)| < m+1\} \geqslant 1 - \frac{m+1}{(m+1)^2} = \frac{m}{m+1}.$$

注 积分 $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx(r > 0)$ 是参数 r 的函数, 称为 Γ 函数, Γ 函数的一个重要性质为 $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r) \quad (r > 0)$.

特别有 $\Gamma(n+1) = n!(n$ 为自然数$)$.

第五章　数理统计初步

题型Ⅰ　样本容量 n，样本均值 $\overline{X}$ 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的求法

【解题提示】 (1) 记住常用的统计量公式：

样本均值　$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$，

样本方差　$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\dfrac{1}{n-1}\Big[\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\Big]$，

样本的 k 阶原点矩　$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$，　$k=1,2,\cdots$，

样本的 k 阶中心矩　$B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k, k=1,2,\cdots$.

(2) 记住常用统计量的分布(抽样分布)：

1° $\overline{X}$ 的分布

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个样本，则

$$\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right).$$

2° χ^2 分布

设 $X\sim N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本，则 χ^2 为

$$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n),$$

性质：$\chi_1^2\sim\chi^2(n_1)$，$\chi_2^2\sim\chi^2(n_2)$，则 $\chi_1^2+\chi_2^2\sim\chi^2(n_1+n_2)$.

其分布密度图形见图 5.1.

对于给定的 $\alpha, 0<\alpha<1$，称满足条件

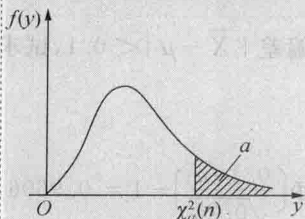


图 5.1

$$P\{\chi^2>\chi_\alpha^2(n)\}=\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty}f(y)\mathrm{d}y=\alpha \text{ 的点 } \chi_\alpha^2(n) \text{ 为 } \chi^2(n) \text{ 分布的}$$

上 α 分位点. 见图 5.1.

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是正态总体 $X\sim n(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n),$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

3° t 分布

设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，则

$$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n).$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，则

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1};Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本，且它们相互独立，则

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)，其中 S_\omega^2=\frac{(n_1-1)S_1^2-(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

t 分布其分布密度的图形见图 5.2.

对给定的 $\alpha,0<\alpha<1$，称满足条件

$$P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{+\infty}h(t)\mathrm{d}t=\alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 的上 α 分位点，见图 5.2.

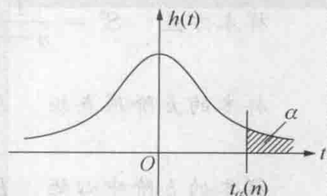


图 5.2

4° F 分布

设 $U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$，并且 U,V 相互独立，则

$F=\dfrac{U/n_1}{V/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$.

对给定的 $\alpha,0<\alpha<1$，称满足条件

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty}\psi(y)\mathrm{d}y=\alpha$$ 的点 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 的上 α 分位点，见图 5.3.

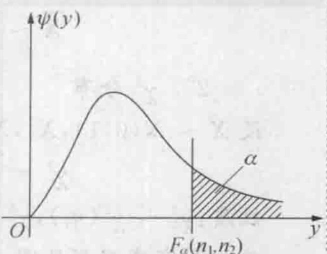


图 5.3

(3) 解题程序：

① 将给定的随机变量根据其特点化为以上四种统计量(或抽样分布)的形式；

② 查相应的标准正态分布表，χ^2 分布表，t 分布表，F 分布表.

【例 5.1】 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，假如要以 0.9606 的概率保证偏差 $|\overline{X}-\mu|<0.1$，试求当 $\sigma^2=0.25$ 时，样本容量 n 应取多大？

【解】 $P\{|\overline{X}-\mu|<0.1\}=0.9606$，即

$$P\{|\overline{X}-\mu|<0.1\}=P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{0.25/n}}\right|<\frac{0.1}{\sqrt{0.25/n}}\right\}=2\Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{\sqrt{0.25}}\right)-1=0.9606,$$

$$\Rightarrow\quad \Phi\left(\frac{0.1\sqrt{n}}{\sqrt{0.25}}\right)=0.9803\Rightarrow\frac{\sqrt{n}}{5}=2.06\Rightarrow n=106.$$

【例 5.2】 设总体 X 服从正态分布 $N(72,100)$，为使样本均值大于 70 的概率不小于 90%，则样本容量 n 至少应取多少？

【解】 设所需样本容量为 n，则

$$P\{\overline{X}>70\}=P\left\{\frac{\overline{X}-72}{\sigma/\sqrt{n}}>\frac{70-72}{10/\sqrt{n}}\right\}=1-P\left\{\frac{\overline{X}-72}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant\frac{-2\sqrt{n}}{10}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\right)=1-\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\right]=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\geqslant 0.9,$$

查标准正态分布表，得$\frac{\sqrt{n}}{5} \geqslant 1.29 \Rightarrow n = 41.6025$，取$n = 42$.

【例 5.3】 设在总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取一个容量为16的样本，这里μ,σ^2为未知，求$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant 1.664\right\}$.

【解】 $$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant 1.664\right) = P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant (n-1) \times 1.664\right\}$$
$$= P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant 15 \times 1.664\right\} = P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leqslant 24.96\right\}$$
$$= 1 - P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > 24.96\right\},$$

因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，查表知$\chi^2_{0.05}(15) = 24.996$.

故取$\alpha = 0.05$，于是$P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leqslant 1.664\right) = 1 - 0.05 = 0.95$.

【例 5.4】 设$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$为$N(0, 0.3^2)$的一个样本，求$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\}$.

【解】 因为$\sum_{i=1}^{10} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{0.3^2}$　（因为$\mu = 0, \sigma^2 = 0.3^2$）

服从自由度为10的χ^2分布.

所以$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{0.3^2} > \frac{1.44}{0.3^2}\right\} = P\{\chi^2(10) > 16\} = 0.1$.

【例 5.5】 设总体$X \sim f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$X_1, X_2, \cdots, X_{50}$为取自$X$的一个样本，试求：(1)$\overline{X}$的数学期望与方差；(2)$S^2$的数学期望；(3)$P\{|\overline{X}| > 0.02\}$.

【解】 $$\mu = E(X) = \int_{-1}^{1} x\,|x|\,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\sigma^2 = D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,|x|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

(1) $$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{50} X_i \Rightarrow E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{50} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{50} E(X_i) = \frac{1}{n} \times 0 = 0,$$
$$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{2n} = \frac{1}{100}(n = 50);$$

(2) $$E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}D(\overline{X})$$
$$= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{4900};$$

(3) $$P\{|\overline{X}| > 0.02\} = 1 - P\{|\overline{X}| \leqslant 0.02\} = 1 - P\left\{\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{D(\overline{X})}}\right| \leqslant \frac{0.02 - \mu}{\sqrt{D(\overline{X})}}\right\}$$
$$= 1 - P\left\{\left|\overline{X}/\frac{1}{10}\right| \leqslant 0.02\right\} = 2 - 2\Phi(0.2) = 0.8414.$$

【例 5.6】 从一正态总体X中抽取容量为10的样本，假设有2%的样本均值与总体均值之

差的绝对值在4以上,求总体的标准差.

【解】 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,样本均值为 $\overline{X}$,则

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

于是 $P\{|\overline{X}-\mu|>4\}=P\left\{\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{10}}>\frac{4}{\sigma/\sqrt{10}}\right\}=1-P\left\{\frac{|\overline{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{10}}\leqslant\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right\}$

$$=2\left[1-\Phi(\frac{4\sqrt{10}}{\sigma})\right]=0.02$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{4\sqrt{10}}{\sigma}\right)=0.99,\text{查标准正态分布表,得}$$

$$\frac{4}{\sigma}\sqrt{10}=2.33 \Rightarrow \sigma=\frac{4\sqrt{10}}{2.33}=5.43$$

题型Ⅱ 求抽样分布

【解题提示】 将欲求的随机变量化为已知分布密度的四种抽样分布:$\overline{X}$ 分布,χ^2 分布,t 分布,F 分布或直接求出随机变量的分布密度.

【例 5.7】 设随机变量 T 服从 $t(n)$ 分布,求 T^2 的分布.

【解】 由 $t(n)$ 分布的定义有

$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$,其中 $X\sim N(0,1^2)$,$Y=\chi^2(n)$,于是

$T^2=\frac{X^2}{Y/n}=\frac{X^2/1}{Y/n}$,由抽样分布 F 的定义可知, T^2 服从 $F(1,n)$ 分布.

【例 5.8】 设总体 X 在区间 $[a,b]$ 上均匀分布,求:(1)来自 X 的简单随机样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的密度 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$;(2)$Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的密度 $f_Y(x)$;$Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的密度 $f_Z(x)$.

【解】 (1) X 的密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立且与 X 同分布,所以有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)^n}, & a\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

(2) 由题设 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布,其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

由 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 及 $Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 分布函数的定义

$F_Y(x)=[F(x)]^n$,

$F_Z(x)=1-[1-F(x)]^n$,

于是有 $f_Y(x) = nF^{n-1}(x)f(x) = \dfrac{n(a-x)^{n-1}}{(b-a)^n}, x \in [a,b],$

$f_Z(x) = n[1-F(x)]^{n-1}f(x) = \dfrac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}, x \in [a,b].$

【例 5.9】 假设$(X_1,X_2,\cdots,X_9)$是来自总体$X \sim N(0,2^2)$的简单随机样本，求系数a,b,c，使

$$Q = a(X_1+X_2)^2 + b(X_3+X_4+X_5)^2 + c(X_6+X_7+X_8+X_9)^2$$

服从χ^2分布，并求其自由度.

【解】 由于$X_1,X_2,\cdots,X_9$相互独立且取自总体$X \sim N(0,2^2)$，由正态分布的线性运算性质有

$$X_1+X_2 \sim N(0,8), \quad X_3+X_4+X_5 \sim N(0,12), \quad X_6+X_7+X_8+X_9 \sim N(0,16).$$

于是，由$\chi^2 = \chi_1^2 + \cdots + \chi_k^2$有

$$Q = \frac{(X_1+X_2)^2}{8} + \frac{(X_3+X_4+X_5)^2}{12} + \frac{(X_6+X_7+X_8+X_9)^2}{16}$$ 服从χ^2分布.

故 $a = \dfrac{1}{8}, b = \dfrac{1}{12}, c = \dfrac{1}{16}$，自由度为3.

【例 5.10】 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，样本均值和方差分别为$\overline{X}$和S^2，X_{n+1}是对X的又一独立观测值，试证统计量

$$T = \frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

服从t分布，自由度为$n-1$.

【证】 显然$\overline{X} \sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$，$X_{n+1} \sim N(\mu,\sigma^2)$，于是

$$X_{n+1}-\overline{X} \sim N\left(0,\frac{(n+1)\sigma^2}{n}\right),$$

$$\Rightarrow U = \frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim N(0,1),$$

又 $\chi^2 = (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$

由于$\overline{X}$和S^2均来自正态总体，故相互独立. 又由$X_1,\cdots,X_n,X_{n+1}$独立，可知$X_{n+1},\overline{X},S^2$独立，从而$X_{n+1}-\overline{X}$与S^2独立.

故 $T = \dfrac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{U}{\sqrt{\chi^2(n-1)/n-1}}$，可见$T$服从$t$分布，自由度为$n-1$.

题型 Ⅲ 统计量的点估计 < 矩估计法 / 最大似然估计法

【解题提示】 (1) 矩估计法(用样本矩作为总体矩估计的一种方法)

解题程序:① 求出总体 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$;

$$② 令 E(X)=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i;D(X)=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

解出欲估计量的表达式即得.

(2) 最大似然估计

解题程序:

设总体 X 的分布密度为 $p(X_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$,其中 $\theta_i(i=1,\cdots,k)$ 为 k 个未知数参数,x_1,x_2,$\cdots$,x_n 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值,则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合密度为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

为样本的似然函数,其中 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$.

① 写出样本的似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$;

② 取对数 $\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta)$;

③ 解方程组 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,k)$.

求出 $L(\theta)$ 的最大值点 $\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_k)$,$\hat{\theta}$ 即为 θ 的最大似然估计量

【例 5.11】 设总体 X 在$[a,b]$上服从均匀分布,a,b 未知. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是一个样本,试求 a,b 的矩估计量.

【解】 $\mu_1=E(X)=\frac{a+b}{2}$,

$$\mu_2=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4}.$$

$$令\quad \frac{a+b}{2}=A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad \frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4}=A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=2A_1\\ b-a=\sqrt{12(A_2-A_1^2)}\end{cases},$$

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2},$$

$$\Rightarrow$$

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

【例 5.12】 设 X 具有分布密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, & x=0,1,2,\cdots\quad 0<\theta<+\infty,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本，求 θ 的最大似然估计量.

【解】 似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} = e^{-n\theta} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}$,

$\ln L(\theta) = -n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)$,

$\frac{d}{d\theta}(\ln L(\theta)) = -n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

令 $\frac{d}{d\theta}(\ln L(\theta)) = 0$，即 $-n + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

【例 5.13】 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的 n 次观察值，试求 σ 的最大似然估计.

【解】 似然函数为 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \sigma) = \frac{1}{(2\sigma)^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\sigma}}$,

$\ln L(\sigma) = -n\ln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n} |x_i|$,

令 $\frac{d}{d\sigma}(\ln L(\sigma)) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Rightarrow \hat{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

【例 5.14】 设总体 X 的分布密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{\theta^3}(\theta - x), & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本. 求：(1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；(2) 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D(\hat{\theta})$.

【解】 (1) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\theta} \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta - x) dx = \frac{\theta}{2}$,

令 $\frac{\theta}{2} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \hat{\theta} = 2\overline{X}$;

(2) $D(\hat{\theta}) = D(2\overline{X}) = 4D(\overline{X}) = 4D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{4}{n^2} D(\sum_{i=1}^{n} X_i)$

$\xlongequal[\text{且同分布}]{\text{因为样本互相独立}} \frac{4}{n^2} \cdot nD(X) = \frac{4}{n} D(X)$,

因为 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (\frac{\theta}{2})^2 = \int_{0}^{\theta} \frac{6x^3}{\theta^3}(\theta - x) dx - \frac{\theta^2}{4}$

$= \frac{3}{10}\theta^2 - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{20}$,

所以 $D(\hat{\theta}) = \frac{4}{n} \times \frac{\theta^2}{20} = \frac{\theta^2}{5n}$.

题型Ⅳ 正态总体均值与方差的区间估计

【解题提示】 (1) 单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本,$\overline{X},S$ 分别是样本均值和样本方差,$1-\alpha(0<\alpha<1)$ 为置信度.

1° μ 的置信区间:

μ 的置信区间:

(ⅰ) 当 σ^2 已知时,取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

由图 5.4 可知 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<Z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$,

$\Rightarrow\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_{\frac{\alpha}{2}})$;

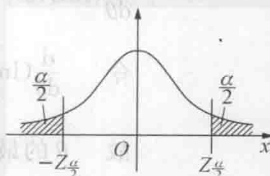


图 5.4

(ⅱ) 当 σ^2 未知时,取统计量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

由图 5.5 可知 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha$,

$\Rightarrow\mu$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$.

2° 方差 σ^2 的置信区间:

实际中常用的是 μ 未知时 σ^2 的区间估计. 为此取统计量 $U=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,从图 5.6 可知,$\sigma^2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$.

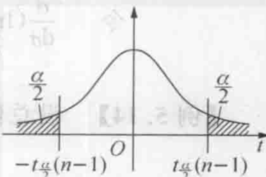


图 5.5

(2) 两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 取自 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$;$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 取自 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,$\overline{X},\overline{Y},S_1^2,S_2^2$ 分别为第一、二总体的样本均值和样本方差,$1-\alpha(0<\alpha<1)$ 为置信度.

1° 两个总体均值差 $(\mu_1-\mu_2)$ 的置信区间:

(ⅰ) 当 σ_1^2,σ_2^2 均已知时,$\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}\right),\overline{Y}\sim N\left(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$,则

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

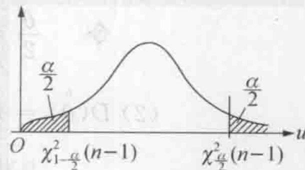


图 5.6

取 $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$,

置信区间 $\left(\overline{X}-\overline{Y}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\overline{X}-\overline{Y}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

(ⅱ) 当 σ_1^2,σ_2^2 均未知时,若 n_1,n_2 很大(一般 $n_1,n_2>50$),

取 $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$,

置信区间为 $\left(\overline{X}-\overline{Y}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}},\overline{X}-\overline{Y}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}\right)$.

(ⅲ) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2,\sigma^2$ 未知时,

取 $U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$,

置信区间为 $\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\right.$

$\left.\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$,

其中 $S_w^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_w=\sqrt{S_w^2}$.

$2°$　两正态总体方差比 $\left(\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$ 的区间估计:

μ_1,μ_2 均未知时,$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right].$$

牢记:$P\{|U|>Z_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha=1-0.05\Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$.

【例 5.15】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 $X\sim N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 为已知常数,选择统计量 $U=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}$,求 σ^2 的 $1-\alpha$ 的置信区间.

【解】 $U=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$,由图 5.7 可知

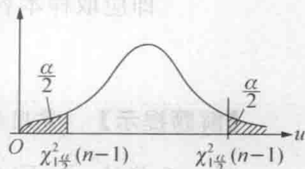


图 5.7

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n),$$

$$\Rightarrow\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right].$$

【例 5.16】 在某校的一个班体检记录中,随意抄录 25 名男生的身高数据,测得平均身高为 170 厘米,(修正) 标准差为 12 厘米,试求该班男生的平均身高 μ 和身高的标准差 σ 的 0.95 置信区间(假设所测身高近似服从正态分布).

【解】 由题设　身高 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$n=25$,$\overline{X}=170$,$S=12$,$\alpha=0.05$.

(1) 先求 μ 的置信区间(σ^2 未知).

取 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$, $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(24)=2.06$,

故　μ 的 0.95 的置信区间为

$$\left(170-\frac{12}{\sqrt{25}}\times 2.06, 170+\frac{12}{\sqrt{25}}\times 2.06\right)=(170-4.94, 170+4.94)$$
$$=(165.06, 174.94).$$

(2) σ^2 的置信区间(μ 未知).

取　$U=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(24)=39.364$,

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(24)=12.401$.

故　σ^2 的 0.95 的置信区间为　$\left(\dfrac{24\times 12^2}{39.364}, \dfrac{24\times 12^2}{12.401}\right)\approx(87.80, 278.69)$,

σ 的 0.95 的置信区间为　$(\sqrt{87.80}, \sqrt{278.69})\approx(9.34, 16.69)$.

【例 5.17】 在测量反应时间中,一心理学家估计的标准差为 0.05 秒,为了以 95% 的置信度使他对平均反应时间的估计误差不超过 0.01 秒,应取多大的样本容量 n.

【解】 以 X 表示反应时间,则 $\mu=E(X)$ 为平均反应时间,由条件知,样本标准差 $S=0.05$ 用样本均值 $\overline{X}$ 估计 μ. 当 n 充分大时,统计量

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}-\mu}{0.05/\sqrt{n}}$$

近似服从标准正态分布 $N(0,1)$,根据条件,要求样本容量 n 满足

$$P\{|\overline{X}-\mu|\leqslant 0.01\}=P\left\{\frac{|\overline{X}-\mu|}{0.05/\sqrt{n}}\leqslant\frac{0.01\sqrt{n}}{0.05}\right\}=0.95.$$

$2\Phi\left(\dfrac{0.01\sqrt{n}}{0.05}\right)-1=2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)-1=0.95\Rightarrow\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)=0.975$,于是有

$$\frac{\sqrt{n}}{5}\approx 1.96 \quad\Rightarrow\quad n\approx 9.8^2=96.04$$

即应取样本容量 n 为 96 或 97.

题型 V　估计量的评选标准

【解题提示】 常用的评选标准有三条:

1° 无偏性 $\overset{\triangle}{=\!=}E(\hat{\theta})=\theta$. 其中 $E(\hat{\theta})$ 为总体 X 的待估参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的数学期望.

$E(\hat{\theta})-\theta$ 称为以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计的系统误差. 无偏估计的实际意义就是无系统误差.

2° 有效性　设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots;X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 均为 θ 的无偏估计量,若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$,则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

3° 一致性　设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ 的估计量,若对于任意 $\varepsilon>0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1$,则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量(也称相合性).

【例 5.18】 设随机变量 X 服从二项分布

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n.$$

试求 p^2 的无偏估计量.

【解】 因为 $X\sim B(n,p)$，

所以 $E(X)=np$， $D(X)=np(1-p)=np-np^2=E(X)-np^2$

$$\Rightarrow\quad p^2=\frac{1}{n}[E(X)-D(X)]=\frac{1}{n}[E(X)-E(X^2)+(E(X))^2]$$

$$\Rightarrow\quad p^2=\frac{1}{n}[E(X(1-X))]+\frac{1}{n}n^2p^2=\frac{1}{n}E[X(1-X)]+np^2$$

$$\Rightarrow\quad p^2=\frac{E[X(X-1)]}{n(n-1)}，故\quad \hat{p^2}=\frac{E[X(X-1)]}{n(n-1)}.$$

【例 5.19】 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个简单随机样本，试证：$S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$（其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$）是 $D(X)$ 的无偏估计.

【证】
$$E(S^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\overline{X})^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)]^2$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)+\sum_{i=1}^{n}E(\overline{X}-\mu)^2\right],$$

因为 $\mu=E(X)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2=n\sigma^2$，$\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)(\overline{X}-\mu)=nE(\overline{X}-\mu)^2$，

$$E(\overline{X}-\mu)^2=D(\overline{X})=\frac{1}{n}D(X)=\frac{1}{n}\sigma^2.$$

故 $\quad E(S^2)=\frac{1}{n-1}[n\sigma^2-2\sigma^2+\sigma^2]=\frac{n-1}{n-1}\sigma^2=\sigma^2.$

即 $\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 $D(X)$ 的无偏估计.

【例 5.20】 设从均值为 μ，方差为 σ^2 的总体中，分别抽取容量为 n_1,n_2 的两个独立样本，$\overline{X_1}$ 和 $\overline{X_2}$ 分别为两样本的均值，试证：对于任意常数 $a,b(a+b=1)$，$Y=a\overline{X_1}+b\overline{X_2}$ 也是 μ 的无偏估计，并确定常数 a,b，使 $D(Y)$ 达到最小.

【解】 因为 $E(\overline{X_1})=\mu$， $E(\overline{X_2})=\mu$，

所以 $E(Y)=E(a\overline{X_1}+b\overline{X_2})=aE(\overline{X_1})+bE(\overline{X_2})=(a+b)\mu$

$=\mu$ （因为 $a+b=1$）.

故 $\quad Y=a\overline{X_1}+b\overline{X_2}$ 也是 μ 的无偏估计.

$$D(Y)=D(a\overline{X_1}+b\overline{X_2})=a^2D(\overline{X_1})+b^2D(\overline{X_2})=\left(\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2}\right)\sigma^2\xlongequal{因为a+b=1}\left[\frac{a^2}{n_1}+\frac{(1-a)^2}{n_2}\right]\sigma^2，\frac{d}{da}(D(Y))=\left(\frac{2a}{n_1}-\frac{2(1-a)}{n_2}\right)\sigma^2,$$

令 $\frac{d}{da}(D(Y))=0\Rightarrow a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$， $b=\frac{n_2}{n_1+n_2}$.

因为$\frac{d^2}{d^2 a}(D(Y))>0$,所以当$a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$, $b=\frac{n_2}{n_1+n_2}$时,$D(Y)$达到最小值.

题型 Ⅵ 一个正态总体均值的假设检验

【解题提示】 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的一个简单随机样本.

(1) 已知$\sigma^2=\sigma_0^2$,检验假设$H_0:\mu=\mu_0$的检验步骤:

① 提出待检假设$H_0:\mu=\mu_0$,备择假设$H_1:\mu\neq\mu_0$;

② 选取统计量$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\underset{(H_0\text{成立时})}{\sim}N(0,1)$;

③ 在给定的显著性水平α $(0<\alpha<1)$下,查标准正态分布表,找出使$P\{|U|>Z_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$成立的临界值$Z_{\frac{\alpha}{2}}$,从而得出$H_0$的拒绝域$(-\infty,-Z_{\frac{\alpha}{2}})\cup(Z_{\frac{\alpha}{2}},+\infty)$;

④ 由样本观测值$x_1,x_2,\cdots,x_n$计算统计量U的观测值,若其落入拒绝域,则拒绝接受H_0,否则接受H_0.

(2) 未知σ^2,检验假设$H_0:\mu=\mu_0$,检验步骤:

① 提出待检假设$H_0:\mu=\mu_0$,备择假设$H_1:\mu\neq\mu_0$;

② 选取统计量$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{(H_0\text{成立时})}{\sim}t(n-1)$;

③ 在给定的显著性水平α $(0<\alpha<1)$下,查t分布表,找出临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}$,使$P\{|U|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\alpha$成立,从而得出$H_0$的拒绝域$(-\infty,-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$;

④ 由样本观测值$x_1,x_2,\cdots,x_n$计算统计量U_0的观测值,若其落入拒绝域,则拒绝接受H_0,否则接受H_0.

(3) 未知σ^2,检验假设$H_0:\mu\leqslant\mu_0$,检验步骤:

① 提出待检假设$H_0:\mu\leqslant\mu_0$(μ_0已知),备择假设$H_1:\mu>\mu_0$;

② 选取统计量$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\overset{(\text{当}H_0\text{成立})}{\sim}t(n-1)$;

③ 在给定的显著性水平α下,查t分布表,找出临界值$t_\alpha(n-1)$,使$P\{U>t_\alpha(n-1)\}=\alpha$,得出$H_0$的拒绝域$(t_\alpha(n-1),+\infty)$;

④ 由样本观测值计算U_0,若$U_0>t_\alpha(n-1)$,则拒绝接受H_0;否则接受H_0.

【例 5.22】 在某年级学生中抽测 9 名跳远成绩,得样本均值$\overline{X}=4.38$m.假设跳远成绩X服从正态分布,且$\sigma=0.3$,问是否可认为该年级学生跳远平均成绩为$\mu=4.40$m $(\alpha=0.10)$.

【解】 ①$H_0:\mu=4.40$ $H_1:\mu\neq4.40$;

② 选统计量 $U=\frac{\overline{X}-4.40}{\sigma/\sqrt{n}}\overset{(H_0\text{成立条件下})}{\sim}N(0,1^2)$;

③ 查标准正态分布表,得出临界值$Z_{\frac{\alpha}{2}}=Z_{0.05}=1.64$.拒绝域$(-\infty,-1.64)\cup(1.64,+\infty)$;

④ 算得 $U_0=\frac{|4.38-4.40|}{0.3/3}=0.2$,显然0.2不在拒绝域内,因此$H_0$被接受,即

可认为该年级学生跳远平均成绩为 4.40m.

【例 5.23】 设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著水平 0.05 下，是否可认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

附 t 分布表　$P\{t(n) \leqslant t_p(n)\} = p$

$t_p(n)$ \ p / n	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

【解】 ① 待检假设 $H_0: \mu = 70$；备择假设 $H_1: \mu \neq 70$；

② 在 H_0 成立条件下选择统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_\alpha(n-1)$；

③ 在显著性水平 0.05 下，查 t 分布表，找出临界值

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(35) = 2.0301$，

拒绝域为 $(-\infty, -2.0301) \cup (2.0301, +\infty)$；

④ 计算　$U_0 = \dfrac{|66.5 - 70|}{15/\sqrt{36}} = 1.4 \in (-2.0301, 2.0301)$，

故接受 H_0，因此可认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

题型 Ⅶ　一个正态总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的假设检验

【解题提示】 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个简单随机样本.

(1) 未知 μ，检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ 的检验步骤：

① 提出待检假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$，备择假设 $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$；

② 选取统计量 $U = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{(当H_0成立)}{\sim} \chi^2(n-1)$；

③ 由给定的显著性水平 α，查 χ^2 分布表，找出临界值 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，得出拒绝域 $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$；

④ 计算 U 的观测值 $U_0 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2}$. 若 U_0 落入拒绝域，则拒绝接受 H_0，否则接受 H_0.

(2) 未知 μ，检验假设 $H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$，检验步骤：

① 提出待检假设 $H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$，备择假设 $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$；

② 选取统计量 $U = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{(H_0成立时)}{\sim} \chi^2(n-1)$；

③ 由给定的显著性水平 α，查 χ^2 分布表，找出临界值 $\chi^2_\alpha(n-1)$，拒绝域 $(\chi^2_\alpha(n-1), +\infty)$；

④ 由观测值计算出 $U_0 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0^2}$，若 $U_0 > \chi^2_\alpha(n-1)$，则拒绝 H_0，否则接受 H_0.

【例 5.24】 某厂生产的电子仪表的寿命服从正态分布，其标准差为 $\sigma = 1.6$，改进新工艺

后，从新的产品中抽出9件，测得平均寿命 $\overline{X}=52.8, S^2=1.19$，问用新工艺后仪表的寿命的方差是否发生了变化(取显著性水平 $\alpha=0.05$).

【解】 ① 待检假设 $H_0:\sigma^2=1.6^2$，备择假设 $H_1:\sigma^2\neq 1.6^2$；

② 选取统计量 $U=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{(H_0\text{成立时})}{\sim}\chi^2(n-1)$；

③ 查 χ^2 分布表，找出临界值 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.025}(8)=17.535, \chi^2_{0.975}(8)=2.180$.

拒绝域为 $(0,2.180)\cup(17.535,+\infty)$；

④ 计算 $U_0=\dfrac{(9-1)\times 1.19}{1.6^2}=3.73$，接受 H_0，即改进工艺后仪表寿命的方差没有显著变化.

【例 5.25】 电工器材厂生产一批保险丝，抽取10根试验其熔断时间，结果为42,65,75,78,71,59,57,68,54,55.问是否可认为整批保险丝的熔断时间的方差不大于80?(熔断时间服从正态分布，显著性水平 $\alpha=0.05$.)

【解】 ① 待检假设 $H_0:\sigma^2\leqslant 80$，备择假设 $H_1:\sigma^2>80$；

② 选取统计量 $U=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\overset{(\text{在}H_0\text{成立下})}{\sim}\chi^2(n-1)$；

③ 由 $\alpha=0.05, n-1=9$，查 χ^2 分布表，

$\chi^2_\alpha(n-1)=\chi^2_{0.05}(9)=16.919$；

④ $\overline{X}=\dfrac{1}{10}(42+65+75+78+71+59+57+68+54+55)=62.4$，

$$S^2=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2=121.8,$$

$$U_0=\frac{9\times 121.8}{80}=13.7\in(0,16.919).$$

故　接受假设 H_0，即在 $\alpha=0.05$ 下，可认为整批保险丝的熔断时间的方差不大于80.

题型 Ⅷ　两个正态总体均值的检验

【解题提示】 设有两个相互独立的正态总体：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$；$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 分别来自总体 X 和总体 Y 的简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S_X^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$\overline{Y}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}Y_i, S_Y^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2,$$

$$S_{XY}^2=\frac{(n-1)S_X^2+(m-1)S_Y^2}{m+n-2}.$$

(1) **两个正态总体均值的检验.**

两个正态总体均值 μ_1 和 μ_2 的检验可归纳为下表：

情形	假设		待检假设 H_0 的否定域	
	待检假设 H_0	备择假设 H_1	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知
1°	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$\left\{U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$	$\left\{\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_{XY}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}\right\rvert\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)\right\}$
2°	$\mu_1\leqslant\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$	$\left\{U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}\geqslant u_{\alpha}\right\}$	$\{t\geqslant t_{\alpha}(m+n-2)\}$
3°	$\mu_1\geqslant\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$	$\left\{U=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n}+\dfrac{\sigma_2^2}{m}}}\leqslant -u_{\alpha}\right\}$	$\{t\leqslant -t_{\alpha}(m+n-2)\}$

(2) **两个正态总体方差的检验.**

两个正态总体的方差 σ_1^2 和 σ_2^2 的检验可归纳为下表：

情形	假设		待检假设 H_0 的否定域
	待检假设 H_0	备择假设 H_1	
1°	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	$\{F\geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)\}\cup\{F\leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1,m-1)\}$
2°	$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	$\{F\geqslant F_{\alpha}(n-1,m-1)\}$
3°	$\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	$\{F\leqslant F_{1-\alpha}(n-1,m-1)\}$

注　$F=\dfrac{S_x^2}{S_y^2}$.

(3) **成对数据均值的检验**

设有两个总体 X 和 Y，X 和 Y 不独立，$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\cdots,(X_n,Y_n)$ 为来自 (X,Y) 的样本，

记　$Z_i=X_i-Y_i\,(i=1,2,\cdots,n)$；$\overline{Z}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2$，$t=\dfrac{\overline{Z}}{S/\sqrt{n}}$.

成对数据 (X,Y) 的均值 μ_1 和 μ_2 的检验可归纳为下表：

情形	假设		待检假设 H_0 的否定域
	待检假设 H_0	备择假设 H_1	
1°	$\mu_1-\mu_2=0$	$\mu_1-\mu_2\neq 0$	$\{\lvert t\rvert\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$
2°	$\mu_1-\mu_2\leqslant 0$	$\mu_1-\mu_2>0$	$\{t\geqslant t_{\alpha}(n-1)\}$
3°	$\mu_1-\mu_2\geqslant 0$	$\mu_1-\mu_2<0$	$\{t\leqslant -t_{\alpha}(n-1)\}$

【例 5.26】 某校从经常参加体育锻炼的男生中随机地选出 50 名，测得平均身高 174.34 厘米；从不经常参加体育锻炼的男生中随机地选 50 名，测得平均身高 172.42 厘米. 统计资料表明两种男生的身高都服从正态分布，其标准差分别为 5.35 厘米和 6.11 厘米，问该校经常参加锻炼的男生是否比不常参加体育锻炼的男生平均身高要高些？($\alpha = 0.05$.)

【解】 X, Y 分别表示常锻炼和不常锻炼男生的身高，由题设 $X \sim N(\mu_1, 5.35^2)$，$Y \sim N(\mu_2, 6.11^2)$.

① 待检假设 $H_0: \mu_1 \leqslant \mu_2$，备择假设 $H_1: \mu_1 > \mu_2$；

② 选取统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n} + \dfrac{\sigma_2^2}{m}}} \overset{(在 H_0 成立下)}{\sim} N(0, 1^2)$；

③ 对于 $\alpha = 0.05$，查正态分布表，$Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.64$；

④ 计算 $U_0 = \dfrac{174.34 - 172.42}{\sqrt{\dfrac{5.35^2}{50} + \dfrac{6.11^2}{50}}} = 1.67 > 1.64$.

故 否定假设 H_0，即表明经常体育锻炼的男生平均身高比不经常体育锻炼的男生平均身高高些.

【例 5.27】 某化工厂为了提高某种化学药品的得率，提出两种方案，为了研究哪一种方案好，分别用两种工艺各进行了 10 次试验，数据如下：

方案甲得率(%)	68.1	62.4	63.3	64.7	68.4	66.0	65.5	66.7	67.3	66.2
方案乙得率(%)	69.1	71.0	69.1	70.0	69.1	69.1	67.3	70.2	72.1	67.3

假设得率服从正态分布，问方案乙是否能比方案甲显著提高得率(取 $\alpha = 0.01$)？

【解】 甲方案和乙方案的取得率分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

① 待检假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，备择假设 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$；

② 选取统计量 $F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \overset{(H_0 成立下)}{\sim} F(n-1, m-1) = F(9, 9)$；

③ 对于 $\alpha = 0.01$，查 F 分布表，$F_{0.005}(9,9) = 6.54$，$F_{0.975}(9.9) = \dfrac{1}{6.54}$，假设 H_0 的拒绝域

$$\left\{F \leqslant \frac{1}{6.54} \text{ 或 } F \geqslant 6.54\right\};$$

④ 由样本值算出两总体的样本均值和样本方差为

$\overline{X} = 66.23$，$\overline{Y} = 69.43$，

$S_X^2 = 3.3246$，$S_Y^2 = 2.2246$，

$F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} = 1.49$.

因为 $\dfrac{1}{6.54} < 1.49 < 6.54$，所以接受假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

【例 5.28】 9 名学生到英语培训班学习，培训前后各进行了一次水平测验，成绩为：

学生编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
入学前成绩 X_i	76	71	70	57	49	69	65	26	59
入学后成绩 Y_i	81	85	70	52	52	63	83	33	62
$Z_i = X_i - Y_i$	-5	-14	0	5	-3	6	-18	-7	-3

假设测验成绩服从正态分布，问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，判断学生的培训效果是否显著？

【解】 设 X,Y 分别表示培训班前后学生的英语测验成绩，显然 X_i 与 $Y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不独立.

令　$Z = X - Y$，则 $Z \sim N(\mu,\sigma^2)$.

① 待检假设 $H_0:E(X) \geqslant E(Y)$ 或 $\mu = E(X) - E(Y) \geqslant 0$，
备择假设 $H_1:\mu = E(X) - E(Y) < 0$；

② 选取统计量 $t = \dfrac{\overline{Z}}{S/\sqrt{n}} \overset{(H_0\text{成立条件})}{\sim} t(n-1)$；

③ 求拒绝域. 这里 $n = 9, 9-1 = 8, \alpha = 0.05$，
查 t_α 分布表，$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(8) = 1.860$，于是 H_0 的否定域为 $(-\infty, -1.860)$；

④ 算出 $\overline{Z} = -4.333, S = 7.937$，则 $t = \dfrac{\overline{Z}}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{-4.333}{7.937/\sqrt{9}} = -1.638$，

$t = -1.638 > -1.860$，所以可认为培训效果不显著.